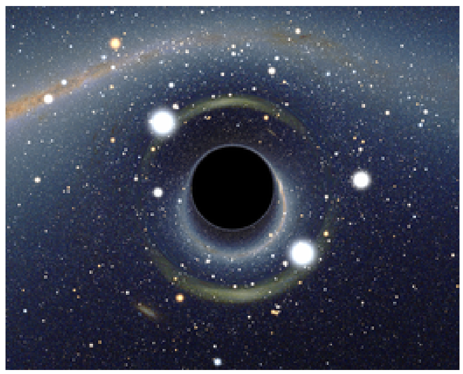
Mécanique céleste

PSI 2022/2023

I Trou Noir

Le concept de trou noir a émergé à la fin du XVIII^e siècle dans le cadre de la gravitation universelle d'Isaac Newton. La question était de savoir s'il existait des astres dont la masse était suffisamment grande pour que même la lumière ne puisse s'en échapper.



Ce concept, purement abstrait pour l'époque, n'a retrouvé un intérêt qu'au XX^e siècle, avec l'avènement de la relativité générale d'Albert Einstein. En effet, peu après la publication des travaux d'Einstein, une solution de l'équation d'Einstein impliquant l'existence d'un trou noir central est publiée par Karl Schwarzschild. La première observation d'un objet contenant un trou noir fut celle de la source de rayons X Cygnus X-1 par le satellite Uhuru en 1971. Le terme de " trou noir " a émergé, lui, dans les années 1960.

On se propose, dans ce problème, de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique newtonienne.

Considérons pour cela un corps P, de masse m et de vitesse $\vec{v}$, distant de r d'un trou noir sphérique de centre O, de masse M et de rayon R. Le corps P est uniquement soumis à la force gravitationnelle due au trou noir. On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$, astrocentrique (dans lequel le trou noir O est fixe), qui est supposé galiléen. On note $G = 6,67.10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ la constante de gravitation universelle.

1. Exprimer l'énergie potentielle dont dérive la force exercée par le trou noir O sur le corps P distant de r.

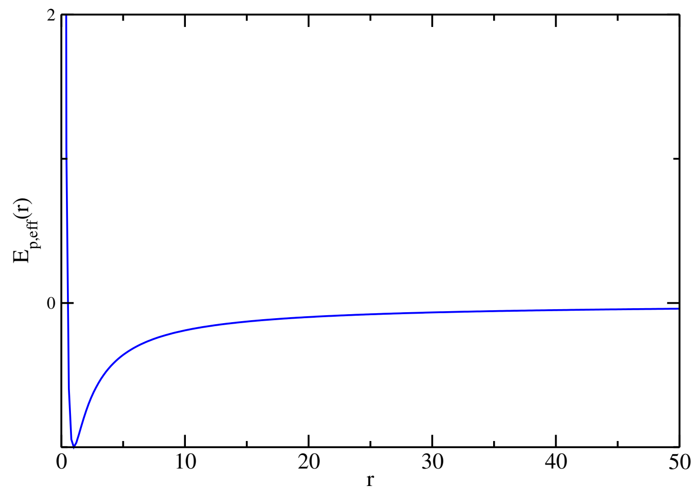
2. Montrer que le mouvement de P est nécessairement plan. P étant alors repéré par ses coordonnées polaires, démontrer que le produit $r^2(t)\dot{\theta}(t)$ est une constante du mouvement.

3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + E_{p,eff}(r)$$

en introduisant une fonction $E_{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression.

4. L'allure de la fonction $E_{p,eff}(r)$ est indiquée ci-dessous :



A l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer quelle valeur minimale d'énergie mécanique doit avoir le corps P pour qu'il puisse échapper à l'attraction du trou noir.

5. En déduire la valeur de la vitesse de libération v_{lib} du corps, définie comme étant la vitesse limite de l'astre permettant de s'échapper du trou noir lorsqu'il se situe à la surface de celui-ci ($r = R$), en fonction de G, M et R.

6. Sachant que la lumière ne peut s'échapper d'un trou noir, comment doit-être la vitesse de libération par rapport à $c = 3.10^8$ m.s^{-1} ? Exprimer le rayon maximal que doit avoir l'astre de masse M pour être un trou noir (ce rayon est appelé rayon de Schwarzschild R_s). Déterminer ce rayon pour un trou noir de la masse du Soleil ($M = 2.10^{30}$ kg) et commenter.

II Erreur de satellisation

On souhaite placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon R_0 autour de la Terre. On suppose qu'au moment où son lanceur le libère, le satellite est au point A de coordonnées ($x = R_0$; $y = 0$; $z = 0$) (cf figure 1).

Q1. Calculer la vitesse V_0 que le lanceur doit donner au satellite pour le placer sur l'orbite circulaire de rayon R_0. On l'exprimera en fonction de G, R_0 et de la masse M_T de la Terre.

Q2. Calculer de même la période orbitale T_0 du satellite sur l'orbite circulaire en fonction de R_0 et V_0.

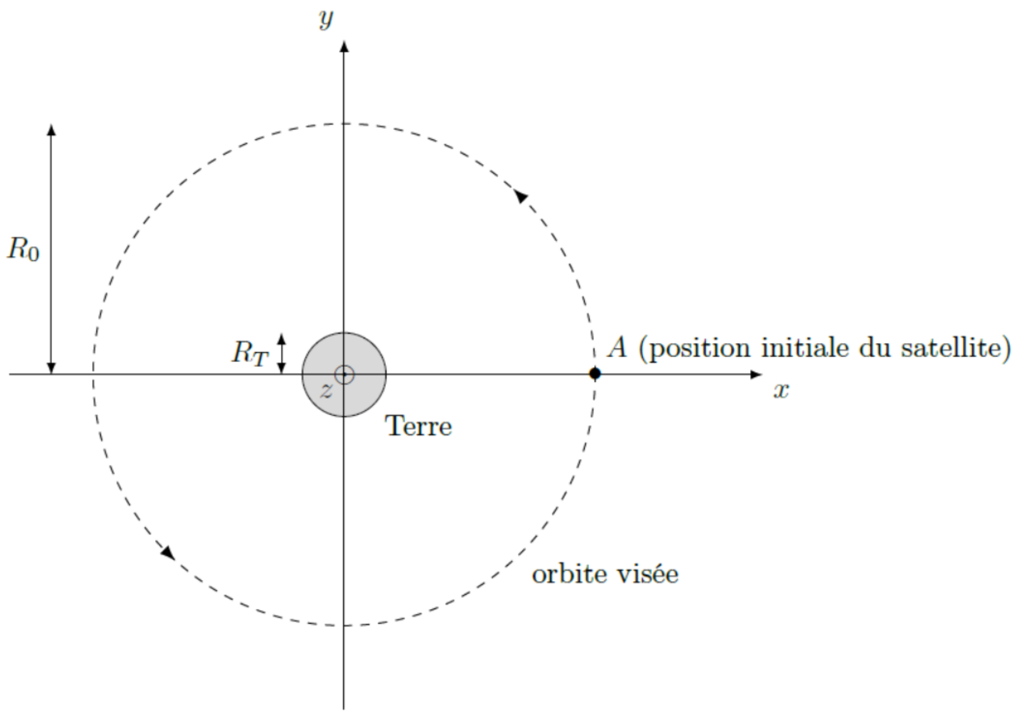


FIGURE 1 – *Paramétrage du problème*

En réalité, le lanceur commet une erreur lors de la satellisation : la vitesse initiale en A est purement orthoradiale, mais sa norme vaut αV_0 , avec $\alpha \neq 1$. Il en résulte que la trajectoire réelle s'écarte de la trajectoire circulaire visée (cf figure 2).

Q3. Évaluer l'énergie mécanique du satellite au point A. Montrer qu'elle est égale à :

$$E_m = \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) mV_0^2$$

Q4. Quelle est la valeur maximale $\alpha_{\max}$ de α permettant de faire en sorte que la trajectoire reste bornée ? Dans la suite, on suppose que $\alpha < \alpha_{\max}$.

Q5. La trajectoire du satellite est donc une ellipse dont le centre de la Terre est un foyer. La figure 7.3 représente les trajectoires obtenues par simulation numérique pour $\alpha = 0.6, \alpha = 0.8, \alpha = 1, \alpha = 1.2$ et $\alpha = 1.4$. Préciser, en justifiant, quelle trajectoire correspond à chaque valeur de α.

Q6. Soit r la distance entre le foyer et le satellite. Le point A ($r = R_0$) correspond au périgée de la trajectoire elliptique. On cherche à déterminer la valeur R' de r à l'apogée.

a) Quel lien y a-t-il entre le demi grand-axe de l'ellipse a, R_0 et R' ?

b) Dans le cas d'une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique E_m vaut :

$$E_m = -\frac{GM_T m}{2a}$$

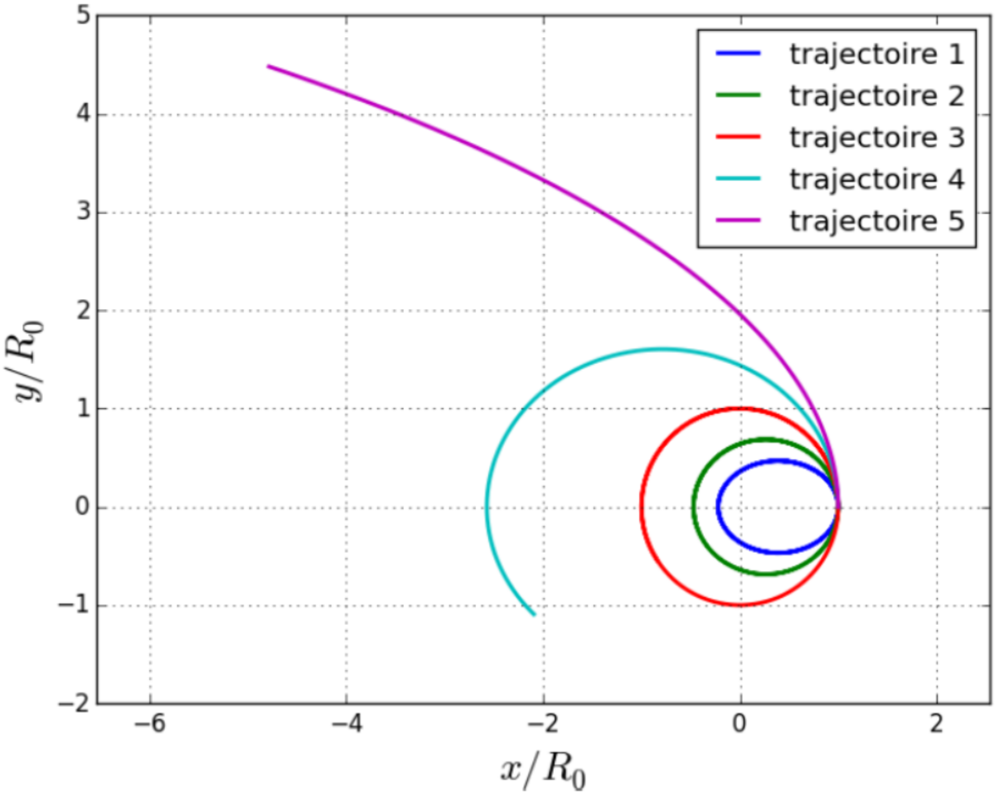


FIGURE 2 – *Trajectoires elliptiques obtenues par simulation numérique pour α variant de 0.6 à 1.4 par pas de 0,2. La trajectoire 1 est la plus interne et la trajectoire 5 la plus externe.*

En déduire que :

$$R' = \frac{\frac{\alpha^2}{2}}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} R_0$$

Q7. a) Calculer le moment cinétique du satellite en A. En déduire l'expression de la constante des aires en fonction de α, R_0 et V_0.

b) Montrer que l'énergie mécanique du satellite peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r)$$

avec :

$$E_{\text{peff}}(r) = mV_0^2 \left(\frac{\alpha^2 R_0^2}{2r^2} - \frac{R_0}{r} \right)$$

c) Justifier le fait que $r = R_0$ et $r = R'$ sont les solutions de l'équation :

$$E_m = E_{\text{peff}}(r)$$

Retrouver par cette méthode la valeur de R'.

Q8. On considère que le satellite est un satellite géostationnaire, lancé avec un défaut de vitesse de 1 %, autrement dit que $\alpha = 0.99$. Calculer numériquement $R_0 - R'$.