Correction TD n° 28

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
⋆Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
⋄ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes⋆

1. Attention de bien établir cette équation en partant de l'expression de la tension d'un ressort. Pour rappel, celle-ci vaut :

$$\boxed{\vec{T} = -K(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ressort}\to\text{masse}}}$$

où ℓ désigne la longueur du ressort (et non la position de la masse). En étant rigoureux, on obtient :

$$m\ddot{x}_n(t) = -K(x_n(t) - x_{n-1}(t)) - K(x_n(t) - x_{n+1}(t))$$

2. En remplaçant l'expression fournie dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$-m\omega^2 = -K(1 - \mathrm{e}^{ika}) - K(1 - \mathrm{e}^{-ika}) \Leftrightarrow m\omega^2 = K(2 - 2\cos(ka))$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\omega = 2\omega_0 \left|\sin\frac{ka}{2}\right|}$$

3. Une onde se caractérise par une double périodicité spatiale et temporelle. La relation liant ces deux périodes est la relation de dispersion. Pour qu'une onde puisse se propager, le couple (ω, k) (équivalent au couple (T, λ)) doit vérifier la relation de dispersion et k doit être réel.
Dans le cas de la chaîne d'atomes, pour $\omega > 2\omega_0$, il n'y a aucune valeur de k réelle qui puisse vérifier la relation de dispersion (car $|\sin x| \leq 1$). Aucune onde de pulsation $\omega > 2\omega_0$ ne peut donc se propager dans la chaîne. Celle-ci agit donc comme un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = 2\omega_0$.

4. On peut faire un développement limité autour de $k = 0$:

$$\omega = 2\omega_0 \left|\sin\frac{ka}{2}\right| \approx_{k=0} \omega_0 ka \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = a\omega_0}$$

Pour les très grandes longueurs d'ondes ($k \approx 0$), le milieu est non dispersif et la vitesse de phase vaut $v_\varphi = a\omega_0$.

2. Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma⋆

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste mais on retire l'hypothèse localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ avec $\vec{k} = \underline{k}\vec{e}_x$.

1. L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow -j\vec{k}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \neq 0$$

Le champ $\vec{E}$ n'est plus transverse à la direction de propagation. Attention, erreur dans le sujet, il faut lire $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$.

2. On a une OPPH donc on peut utiliser une relation de structure :

$$\frac{-j\vec{k}\wedge\vec{E}}{=} - j\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \vec{0}$$

3. On peut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{0} = \mu_0\vec{j}(M,t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t) \leftrightarrow \boxed{\vec{j}(M,t) = -\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)} \quad (1)$$

Par ailleurs, l'écriture du PFD appliqué à {un électron} donne :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} \leftrightarrow \boxed{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(M,t) = \frac{n^\star e^2}{m}\vec{E}(M,t)} \quad (2)$$

La transformation de la dérivée droite en dérivée partiel vient du passage du point de vue lagrangien ($\vec{v}(t)$ désigne la vitesse d'un électron et ne dépend que du temps) au point de vue eulérien ($\vec{j}(M,t)$ désigne le courant au point M à l'instant t). En combinant les deux équations, on en déduit :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}(M,t)+\frac{n^\star e^2}{m\varepsilon_0}\vec{E}(M,t)=\vec{0}$$

soit, en introduisant la pulsation plasma du cours :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}(M,t)+\omega_p^2\vec{E}(M,t)=\vec{0}$$

4. La "relation de dispersion" s'écrit : $\omega=\omega_p$. Cela signifie qu'indépendamment de la longueur d'onde, le champ $\vec{E}$ vibre toujours à la pulsation ω_p. On ne peut pas vraiment parler d'"onde" dans ce cas.
5. Le vecteur de Poynting est nul. La densité d'énergie électromagnétique vaut :

$$u(M,t)=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2(M,t)$$

Le bilan d'énergie donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(M,t)=\varepsilon_0\vec{E}(M,t)\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(M,t)\underset{(1)}{=}-\vec{E}(M,t)\cdot\vec{j}(M,t)$$

On retrouve le bilan local d'énergie électromagnétique.

3. Ondes hertziennes dans l'eau de mer⋆

Remarque : Les ondes hertziennes sont les ondes de fréquence inférieure à la centaine de gigahertz. La conductivité du cuivre est de l'ordre de 6.10^7 S.m^{-1}. Elle est 10 millions de fois plus élevée que celle de l'eau.

1. Les 4 équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{E} &=0\\ \mathrm{div}\vec{B} &=0\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} &=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} &=\mu_0\sigma\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

L'équation de propagation s'obtient en partant de :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E})=-\vec{\Delta}\vec{E}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\sigma\vec{E}+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{\Delta}\vec{E}=\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

2. La relation de dispersion s'écrit :

$$k^2=-\mu_0\sigma j\omega+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2$$

3. Il faut comparer les deux termes de droites. Si le premier terme est majoritaire, on obtient une relation de dispersion de type "diffusion" : l'absorption sera majoritaire. Si le second terme est majoritaire, le vecteur d'onde est réel, il n'y a aucune absorption. On pourra donc négliger ce phénomène si :

$$\mu_0\sigma\omega<<\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\omega>>\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\Leftrightarrow\omega>>8,8.10^9\mathrm{s}^{-1}}$$

Cela correspond à une fréquence de l'ordre du GHz. En absence d'absorption, la relation de dispersion se simplifie en :

$$k^2=\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2$$

et la vitesse de phase vaut $\boxed{v_\varphi=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$.

4. Dans un concours E3A ou CCP, le sujet proposera certainement de négliger le deuxième terme pour $f=100$MHz. Dans un concours plus exigeant, on peut imaginer qu'il faille effectuer le calcul complet. Dans ce cas, on écrit $\underline{k}=k_r+jk_i$ et on sépare partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases}k_r^2-k_i^2 &=\varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}\\ 2k_rk_i &=-\mu_0\sigma\omega\end{cases}$$

En substituant k_r dans la première équation et en mulitpliant tout par k_i^2 :

$$\frac{(\mu_0\sigma\omega)^2}{4}-k_i^4=\varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2}k_i^2$$

Pour trouver k_i, on effectue le changement de variable $X = k_i^2$. X est alors solution du polynôme :

$$X^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} X - \frac{(\mu_0 \sigma \omega)^2}{4} = 0$$

On trouve :

$$X = -\varepsilon_r \frac{\omega^2}{2c^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\Delta = \varepsilon_r^2 \frac{\omega^4}{c^4} + (\mu_0 \sigma \omega)^2$ La seule solution acceptable est la solution positive. D'où :

$$k_i = \pm \sqrt{-\varepsilon_r \frac{\omega^2}{2c^2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

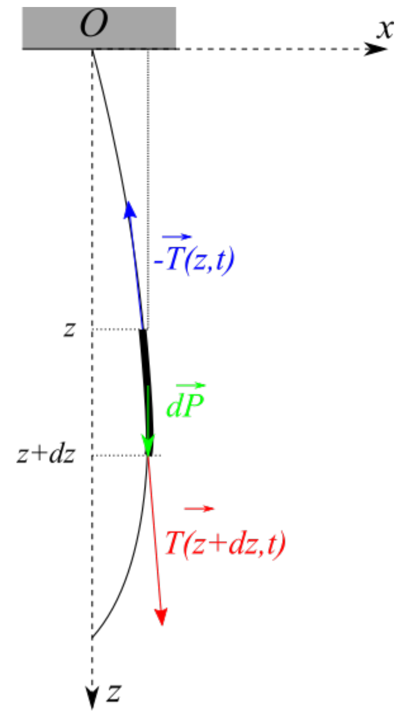
Si on suppose une propagation dans le sens des r croissants, $k_r > 0$ et $k_i < 0$ et on a :

$$\begin{cases} k_r &= \dfrac{\mu_0 \sigma \omega}{2\sqrt{-\varepsilon_r \frac{\omega^2}{2c^2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}} \\ k_i &= -\sqrt{-\varepsilon_r \frac{\omega^2}{2c^2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases}$$

La distance d'atténuation vaut $\boxed{\delta = \frac{1}{|k_i|} = 21\text{mm}}$. Les ondes électromagnétiques hertziennes sont donc très fortement atténuées par l'eau. La vitesse de phase s'exprime par $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k_r}}$. A la pulsation considérée, elle vaut $1,2.10^7 \text{m.s}^{-1}$.Cette valeur dépendant de ω, il y a dispersion.

4. Corde verticale•

1. On reprend le bilan des forces sur la portion de tige sauf qu'on ne néglige plus le poids. La corde étant fixe, il est plus facile de positionner l'origine au niveau du point d'attache et d'orienter l'axe vertical vers le bas (sens du poids).



Le PFD appliqué à {un morceau de corde} donne :

$$\mu \mathrm{d}z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \mu \mathrm{d}z g \vec{e}_z + \vec{T}(z + \mathrm{d}z) - \vec{T}(z)$$

La projection du PFD dans la base donne :

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \dfrac{\partial (T(z,t) \sin \alpha(z,t))}{\partial z} \\ -\mu g &= \dfrac{\partial (T(z,t) \cos \alpha(z,t))}{\partial z} \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits angles, la deuxième équation s'intègre en $T(z) = \text{cste} - \mu g z$. En $z = \ell$, la tension est nulle donc $\boxed{T(z) = \mu g(\ell - z)}$. En remplaçant dans la première composante, on obtient :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\left(g(\ell - z) \frac{\partial x}{\partial z} \right)(z,t)$$

En développant le deuxième terme, on obtient bien l'équation demandée.

2. L'équation se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g\frac{\partial x}{\partial z} + g\ell\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

La relation de dispersion en découle :

$$\omega^2 = gjk + g\ell k^2$$

Cette équation admet deux solutions complexes de la forme :

$$\underline{k} = -j\frac{1}{2\ell} \pm \frac{\sqrt{4\omega^2\ell g - 1}}{=} - \frac{j}{\delta} \pm k_r$$

la solution + correspondant à une onde se propageant dans le sens des z croissants. Si on s'intéresse uniquement à cette dernière (en supposant par exemple que la corde est excitée sinusoïdalement en $z = 0$), la forme complexe de l'onde sera :

$$\underline{x}(t) = x_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)} = x_0 e^{\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - k_r z)}$$

et l'onde réelle s'écrira :

$$x(t) = x_0 e^{\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - k_r z)$$

On voit que l'amplitude de l'onde croît avec z. Attention, ceci n'est valable que dans l'approximation de départ, à savoir $z << \ell$. On ne peut donc pas généraliser ce résultat quand z devient très grand.

5. Guide d'onde rectangulaire•

On considère un guide d'onde métallique creux d'axe Oz, dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$ et $0 < y < b$. L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait. On se propose d'étudier la propagation suivant Oz dans ce guide d'une onde électromagnétique progressive monochromatique de pulsation ! dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = f(x,y)cos(\omega t - k_g z)\vec{e}_x$ où $f(x,y)$ est une fonction réelle de x et y et k_g une constante positive. On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est la longueur d'onde guidée) et on notera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

1. A l'intérieur du guide d'onde, il n'y a que du vide, donc $\text{div}\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$. L'amplitude de l'onde ne dépend pas de x mais elle dépend tout de même de y : l'onde n'est pas *plane*.

2. On part de manière classique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\Delta}\vec{E}$$

Le champ électrique est solution d'une équation de d'Alembert. En projetant sur $\vec{e}_x$, on obtient :

$$f(y)'' + \left(k_0^2 - k_g^2\right) f(y) = 0$$

3. L'équation ci-dessus est une équation du second ordre :
   - Si $|k_0| > |k_g|$, on a une solution sinusoïdale,
   - Si $|k_0| = |k_g|$, on a une solution affine,
   - Si $|k_0| < |k_g|$, on a une solution exponentielle

   Etant donné que les parois métalliques imposent la nullité du champ en $y = 0$ et $y = b$ (continuité de la composante tangentielle du champ électrique), seul le premier cas peut convenir (les deux autres formes de solutions conduisent à $\vec{E} = \vec{0}$. Introduisons donc K tel que $K^2 = k_0^2 - k_g^2$, on a :

$$f(y) = A\cos(Ky) + E_0 \sin(Ky)$$

   La condition en $y = 0$ impose $A = 0$. La deuxième condition impose $Kb = n\pi$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. On en déduit :

$$f(y) = E_0 \sin\frac{n\pi y}{b}$$

   et le champ électrique total s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \sin\frac{n\pi y}{b}\cos(\omega t - k_g z)\vec{e}_x}$$

   Il s'agit d'un champ "mixte" : il se propage dans la direction (Oz) mais il est stationnaire dans la direction (Oy). Il est polarisé rectilignement suivant (Ox). En $x = 0$ et $x = a$, le champ dans le guide est normal aux parois métalliques. Cela laisse prévoir l'existence d'une densité surfacique de charge non nulle sur ces parois. *Noter que les conditions initiales ne sont pas suffisantes pour déterminer l'expression de E_0.*

4. Pour trouver le champ magnétique, on n'utilisera pas les relations de structure car on n'a pas une OPPH ici. On restera en réel et on utilisera l'équation de

Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_0 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression des composantes de $\vec{B}$:

$$\vec{B}(M,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \frac{k_g}{\omega} \sin(Ky)\cos(\omega t - k_g z) \\ E_0 \frac{K}{\omega} \cos(Ky)\sin(\omega t - k_g z) \end{pmatrix}$$

On note que le champ magnétique n'est pas transverse : il a une composante suivant $\vec{e}_z$. La composante normale du champ magnétique est continue, et doit s'annuler sur les parois, ce que l'on observe en $y = 0$ et $y = b$, où la composante selon $\vec{e}_y$ s'annule bien. En $x = 0$ et $x = a$, c'est pareil. Par contre on note que la composante tangentielle du champ magnétique est non nulle, signe qu'il y a un courant surfacique.

5. D'après les calculs précédents, on a :

$$K^2 = k_0^2 - k_g^2 \Rightarrow k_g^2 = k_0^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2} \Rightarrow \boxed{k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b}\right)^2}}}$$

Il n'y a plus de propagation à partir du moment où la racine n'est plus définie, c'est-à-dire pour $f < \frac{nc}{2b}$. Le guide d'onde est un filtre passe-bas. Numériquement, on trouve $b = 6$ cm.

6. La vitesse de phase est définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega}\right)^2}} > c$$

On rappelle que cette vitesse désigne la vitesse d'une OPPH seule qui dans la réalité n'existe pas. La vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g}$$

On l'obtient en différenciant la relation

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$$

:

$$\mathrm{d}K^2 = 0 = 2\frac{\omega}{c^2}\mathrm{d}\omega - 2k_g \mathrm{d}k_g \Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega}\right)^2} < c$$

.