TD n°25 Ondes sonores

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé
$\star$Exercice niveau CCP
• Exercice niveau Centrale/Mines
$\diamond$ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Isolation phonique$\star$

1. Dans le cadre de l'approximation acoustique.
2. Il faudrait mieux faire la question 3 avant la question 2 !
3. Ecrivons tout d'abord la forme des différentes ondes :

$$\begin{cases}\underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - kx)}\\ \underline{P}_i = P_0 e^{j(\omega t - kx)}\end{cases} \qquad \begin{cases}\underline{v}_r = \underline{v}_{r0} e^{j(\omega t + kx)}\\ \underline{P}_i = \underline{P}_{r0} e^{j(\omega t + kx)}\end{cases} \qquad \begin{cases}\underline{v}_t = \underline{v}_{t0} e^{j(\omega t - kx)}\\ \underline{P}_t = \underline{P}_{t0} e^{j(\omega t - kx)}\end{cases}$$

   On peut par ailleurs introduire la position du mur $\xi(t) = \underline{\xi}_m e^{j\omega t}$.

   La condition aux limites sur la vitesse s'écrit :

$$\underline{v}_i(0,t) + \underline{v}_r(0,t) = \underline{v}_t(0,t) = \dot{\xi}(t) \Rightarrow \boxed{\underline{v}_0 + \underline{v}_{r0} = \underline{v}_{t0} = j\omega \underline{\xi}_m}$$

   La condition aux limites sur la pression s'obtient en écrivant le PFD au $\{\text{mur}\}$:

$$m\ddot{\xi}(t) = S(\underline{P}_i(0,t) + \underline{P}_r(0,t) - \underline{P}_t(0,t)) \Rightarrow \boxed{-\omega^2 \rho e \underline{\xi}_m = P_0 + \underline{P}_{r0} - \underline{P}_{t0}}$$

4. En notant Z l'impédance caractéristique de l'air :

$$\begin{cases}\underline{v}_0 + \underline{v}_{r0} = \underline{v}_{t0} & = j\omega \underline{\xi}_m\\ P_0 + \underline{P}_{r0} - \underline{P}_{t0} & = -\omega^2 \rho e \underline{\xi}_m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v_0 + \underline{v}_{r0} = \underline{v}_{t0} & = j\omega \underline{\xi}_m\\ Zv_0 - Z\underline{v}_{r0} - Z\underline{v}_{t0} & = -\omega^2 \rho e \underline{\xi}_m\end{cases}$$

   En substituant $\underline{v}_{r0}$ dans la deuxième équation, on en déduit :

$$j\omega \rho e \underline{v}_{t0} = Z(v_0 - \underline{v}_{t0} + v_0 - \underline{v}_{t0}) \Leftrightarrow \boxed{\tau(j\omega) = \frac{2Z}{2Z + \rho e j\omega}}$$

   Le coefficient en puissance s'en déduit :

$$T(j\omega) = \frac{<\Pi_t(0,t)>}{<\Pi_i(0,t)>}$$

   On utilise la formule un peu HP pour éviter de passer en réel :

$$<\Pi_i(0,t)> = \frac{1}{2}\Re(\underline{P}_i \underline{v}_i^\star) = \frac{1}{2} Z |\underline{v}_i|^2$$

   pour en déduire :

$$\boxed{T(j\omega) = \left|\frac{2Z}{2Z + \rho e j\omega}\right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho e \omega}{2Z}\right)^2}}$$

   On reconnaît l'expression d'un filtre passe-bas d'ordre 2 de fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{Z}{\pi \rho e}$$

   Les murs laissent donc passer les basses et coupent les aigues (comme vous avez déjà dû vous rendre compte). Plus le mur est épais, plus il coupe.

5. Si on veut une atténuation de 40 dB à 400 Hz, il faut que $T = 10^{-4}$. On a donc :

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt{9999}} \Rightarrow e = \frac{2\rho c\sqrt{9999}}{\omega \rho} = 94\text{cm}$$

   . A moins d'habiter dans un château, c'est peine perdue...

Ondes sphériques

1. Partons de l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ de surpression :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r p_1(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

En multipliant cette équation par r et en posant $f(r,t) = rp_1(r,t)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(r,t)$$

$f(r,t)$ vérifie donc une équation de d'Alembert à une dimension et s'écrit nécessairement sous la forme $f(r,t) = A\left(t - \frac{r}{c}\right) + B\left(t + \frac{r}{c}\right)$. On en déduit la solution :

$$p_1(r,t) = \frac{A\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{B\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}$$

On choisit ici une onde progressive se dirigeant selon $+\vec{e}_r$, car il n'y a aucune condition aux limites pour de grandes valeurs de r qui expliquent qu'en plus de l'onde progressive émise par la sphère pulsante, il y ait une onde réfléchie.

2. On utilise le PFD linéarisé. En dérivant proprement, on doit obtenir :

$$\vec{v}_1(r,t) = \frac{A}{\mu_0 r \omega}\left(\frac{\sin(\omega t - kr + \varphi)}{r} + k\cos(\omega t - kr + \varphi)\right)\vec{e}_r$$

3. Pour $r << \lambda$, le premier terme dans l'expression de la vitesse est prépondérant. Par ailleurs, on a égalité de la vitesse du fluide et de la vitesse de l'enceinte en $r = a \approx a_0$:

$$v_1(a(t),t) \approx v_1(a_0,t) = \dot{a}(t) \Rightarrow v_1(a_0,t) = -a_1\omega\sin(\omega t)$$

ce qui conduit à :

$$-a_1\omega\sin(\omega t) = \frac{A}{\mu_0 a_0^2 \omega}\sin(\omega t - ka_0 + \varphi)$$

L'égalité des amplitudes et des phases donne :

$$\begin{cases} A & = \mu_0 a_1 a_0^2 \omega^2 \\ \varphi & = \pi - ka_0 \approx \pi \end{cases}$$

car $ka_0 \approx \frac{a_0}{\lambda} << 1$

4. Pour $r >> \lambda$, le second terme est prépondérant :

$$\vec{v}_1(r,t) = \frac{A}{\mu_0 rc}\cos(\omega t - kr + \varphi)\vec{e}_r$$

On s'aperçoit alors que $\boxed{v_1(r,t) = \frac{p_1(r,t)}{\mu_0 c}}$ et l'on retrouve donc le lien entre surpression et vitesse pour une onde plane progressive harmonique !

5. En champ lointain, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut :

$$\mathscr{P} = < 4\pi r^2 \Pi(r,t) > = 4\pi r^2 \mu_0 c \frac{A^2}{2\mu_0^2 r^2 c^2} = 2\pi\frac{A^2}{\mu_0 c} = 2\pi\frac{\mu_0 a_1^2 a_0^4 \omega^4}{c}$$

Comme la puissance est proportionnelle à $a_0^4\omega^4$, pour obtenir une même puissance, il faut augmenter a_0 pour permettre d'avoir ω plus faible.C'est pourquoi les enceintes des basses sont beaucoup plus grosses que les enceintes pour son aigu.