Bilans macroscopiques

Rappel du programme : Objectifs généraux de la formation

Présentation

Cette partie prolonge l'étude des machines thermiques réalisée en première année. Elle a pour objectif d'effectuer des bilans de grandeurs extensives thermodynamiques et mécaniques. Ces bilans sont illustrés sur des situations d'intérêt industriel (réacteur, éolienne, turbine, machines thermiques…). On proscrira les dispositifs désuets tels que le tourniquet hydraulique.

On définit également le modèle de l'écoulement parfait qui permet d'introduire la relation de Bernoulli et la notion de charge.

Si un bilan mécanique nécessite un changement de référentiel, on pourra utiliser la loi de composition des vitesses abordée dans le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

Objectifs de formation

– Définir avec rigueur un système approprié.
– Utiliser des modèles et analyser leurs limites.
– Appliquer les lois générales de la mécanique et de la thermodynamique.
– Étudier des systèmes d'intérêt industriel.

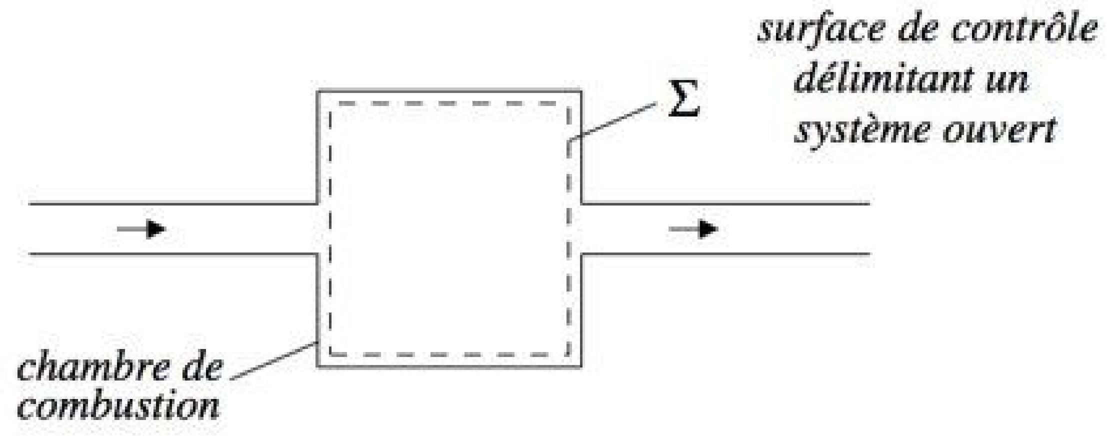
1. Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques	
Système ouvert, système fermé.	À partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive.
2. Bilans d'énergie	
Bilans thermodynamiques.	Exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire en vue de l'étude d'une machine thermique sous la forme : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q$; $\Delta s = s_e + s_c$
Modèle de l'écoulement parfait : adiabatique, réversible, non visqueux. Relation de Bernoulli. Effet Venturi.	Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite. Énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. Décrire l'effet Venturi. Décrire les applications : tube de Pitot, débitmètre.
Pertes de charge régulière et singulière dans une conduite.	Relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique.
Bilan macroscopique d'énergie mécanique.	Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle : pompe ou turbine. Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.
3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique	
Loi de la quantité de mouvement pour un système fermé.	Faire l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
Loi du moment cinétique pour un système fermé.	Effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine.

I. Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques

1. Position du problème et cadre de l'étude

Dans le cadre de **l'écoulement des fluides**, nous avons étudié précédemment des modèles simples qui présentent des solutions analytiques, comme l'écoulement laminaire de Poiseuille d'un fluide incompressible dans une conduite. Ces résultats ne doivent pas masquer le **caractère exceptionnel d'une solution analytique** bien déterminée pour l'écoulement des fluides, et la mécanique des fluides en général. Plutôt que d'étudier le transport d'une particule de fluide, il peut s'avérer plus efficace, quitte à surmodéliser les écoulements, de faire des **bilans macroscopiques** (d'énergie, de quantité de mouvement…). C'est la **méthode** qui sera présentée dans ce chapitre, dont la finalité est **l'étude de systèmes industriels**, comme des turbines, éoliennes, propulseurs, machines thermiques…

Selon cet objectif, il faut donc appliquer les **théorèmes mécaniques** ou **énergétiques, valides** pour **des systèmes fermés, à un fluide en écoulement**, qui constitue naturellement un **système ouvert**, **soumis à des échanges par des flux entrant et sortant**. En effet, un fluide contenu dans une zone donnée de l'écoulement : chambre de combustion, voisinage d'une éolienne circule dans ces dispositifs, et constitue un système ouvert.
Nous allons présenter une **méthode** qui permet de concilier ces deux aspects **pour résoudre cet antagonisme**.



Précisons d'abord **les conditions de l'étude**, selon le programme de PSI :

- le **fluide en écoulement traverse une zone** dans laquelle il **subit** une **transformation thermodynamique** : combustion, échangeur thermique, réaction chimique…, ou une **action mécanique** : par l'intermédiaire d'une conduite coudée ou de section variable, par l'**effet d'un élément actif**, comme l'entraînement par une turbine, une hélice, la dépression sous l'effet d'une pompe…

- l'écoulement est supposé **unidimensionnel** : tous les champs eulériens définissant les propriétés locales du fluide, vitesse, pression, masse volumique…

ne dépendent que d'une seule coordonnée de l'espace. Concrètement, les **caractéristiques de l'écoulement seront uniformes sur une section droite**, en amont et aval du système

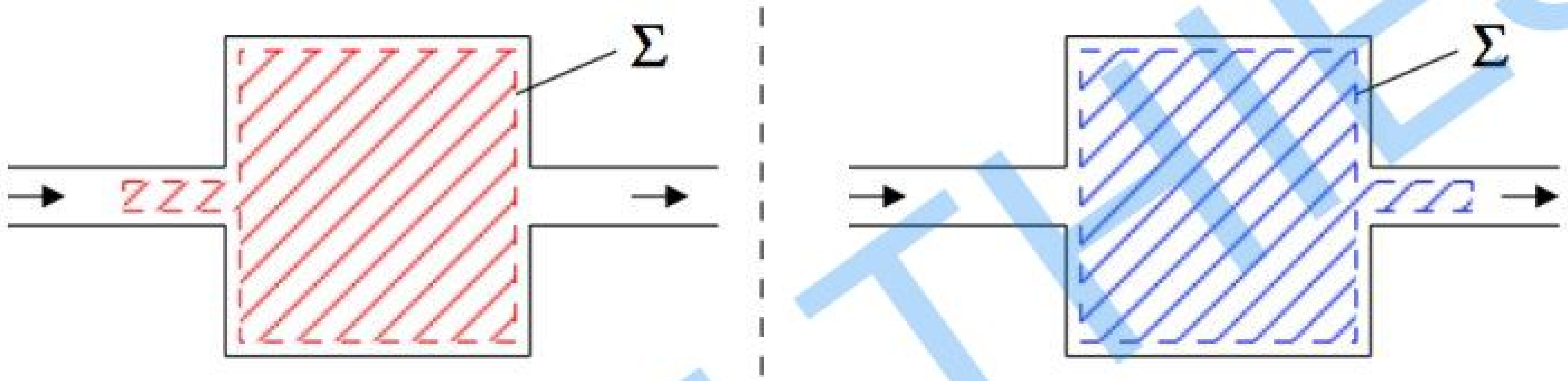
- le **régime d'écoulement** est **stationnaire** : les champs eulériens ne dépendent pas explicitement du temps. **Les caractéristiques de l'écoulement à l'intérieur du système**, souvent mal connues, **n'interviennent pas dans les bilans**, comme nous allons le voir.

2. Définition un système fermé et méthode générale des bilans

Compétence : à partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive

➔ Définition du système fermé

Un **système fermé**, noté **S**, est un système pouvant échanger de l'énergie mais pas de matière avec l'extérieur, contrairement au **système ouvert défini** par la **surface de contrôle ouverte Σ**, soumise aux échanges de matière.
On définit alors le système fermé de la façon suivante :
- **à l'instant t** : il s'agit du **fluide contenu à l'intérieur de Σ + le fluide qui va entrer dans Σ** entre t et t+dt
- **à l'instant t+dt** : il s'agit du **fluide contenu à l'intérieur de Σ + le fluide qui est sorti de Σ** entre t et t+dt



S à l'instant t — *S à l'instant t+dt*

➔ Bilan de grandeur extensive

On s'intéresse à une **grandeur extensive G** décrivant le fluide : quantité de mouvement, énergie cinétique, énergie mécanique, enthalpie, entropie….

- **à l'instant t**, la grandeur G associée au système S peut s'écrire :

$$G(t) = G_\Sigma(t) + \delta_e G$$

Avec $G_\Sigma(t)$ la grandeur associée au fluide contenu dans Σ la surface de contrôle ouverte à l'instant t (système ouvert), et $\delta_e G$ la grandeur G associée au fluide qui va entrer dans Σ pendant dt

- **à l'instant t+dt**, la grandeur G associée au système S peut s'écrire :

$$G(t+dt) = G_\Sigma(t+dt) + \delta_s G$$

Avec $G_\Sigma(t+dt)$ la grandeur associée au fluide contenu dans Σ la surface de contrôle ouverte à l'instant t+dt (système ouvert), et $\delta_s G$ la grandeur G associée au fluide qui est sortie de Σ pendant dt

On peut en déduire la variation de G pour le système fermé S entre t et t+dt :

$$dG = G(t+dt) - G(t) = \underbrace{\boldsymbol{G_\Sigma(t+dt) - G_\Sigma(t)}}_{\boldsymbol{=0\ en\ régime\ permanent}} + \delta_s G - \delta_e G$$

$$\boxed{\boldsymbol{dG = \delta_s G - \delta_e G}}$$

*En **régime stationnaire**, la **variation de la grandeur extensive G** pour le **système fermé** se réduit **au bilan des quantités qui entrent et qui sortent**, facilement accessibles à l'expérience.*

3. Echange de matière : conservation du débit massique et relation grandeur extensive/intensive

En régime stationnaire, il y a **conservation du débit massique** $\boldsymbol{D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu\, v\, S}$ pour le système ouvert défini par la surface de contrôle :

$$\boxed{\boldsymbol{D_{m,e} = D_{m,s} = D_m}}$$

En introduisant la **grandeur massique intensive g** associée à G pour le système fermé S **:** $\boldsymbol{dG = g\, dm = g\, D_m\, dt}$, on obtient un nouveau bilan reliant grandeur extensive et intensive :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dG}{dt} = D_m\,(g_s - g_e)}}$$

Le tableau ci-dessous présente différents bilans mécaniques et thermodynamiques de grandeurs extensives :

Loi	G	g	Expression	Régime stationnaire
CM	m	1	$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t}=0$	$D_m = Cste$
RFD	$\vec{P}$	$\vec{V}$	$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t}=\sum \vec{F}^{ext}$	$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t}=D_m\left(\vec{V}_s-\vec{V}_e\right)$
TMC	$\vec{L}_O$	$\vec{l}_O$	$\frac{\mathrm{D}\vec{L}_O}{\mathrm{D}t}=\sum \vec{M}_O^{ext}$	$\frac{\mathrm{D}\vec{L}_O}{\mathrm{D}t}=D_m\left(\vec{l}_{O,s}-\vec{l}_{O,e}\right)$
TEC	E_c	$\frac{V^2}{2}$	$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t}=\sum \mathscr{P}^{ext}+\sum \mathscr{P}^{int}$	$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t}=\frac{D_m}{2}\left(V_s^2-V_e^2\right)$
TH1	E	e	$\frac{\mathrm{D}E_t}{\mathrm{D}t}=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}+\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\mathrm{D}E_t}{\mathrm{D}t}=D_m\left(e_{t,s}-e_{t,e}\right)$
TH2	S	s	$\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\frac{\delta S^c}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{T_{ext}}\frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$	$\frac{DS}{Dt}=D_m\left(s_s-s_e\right)$

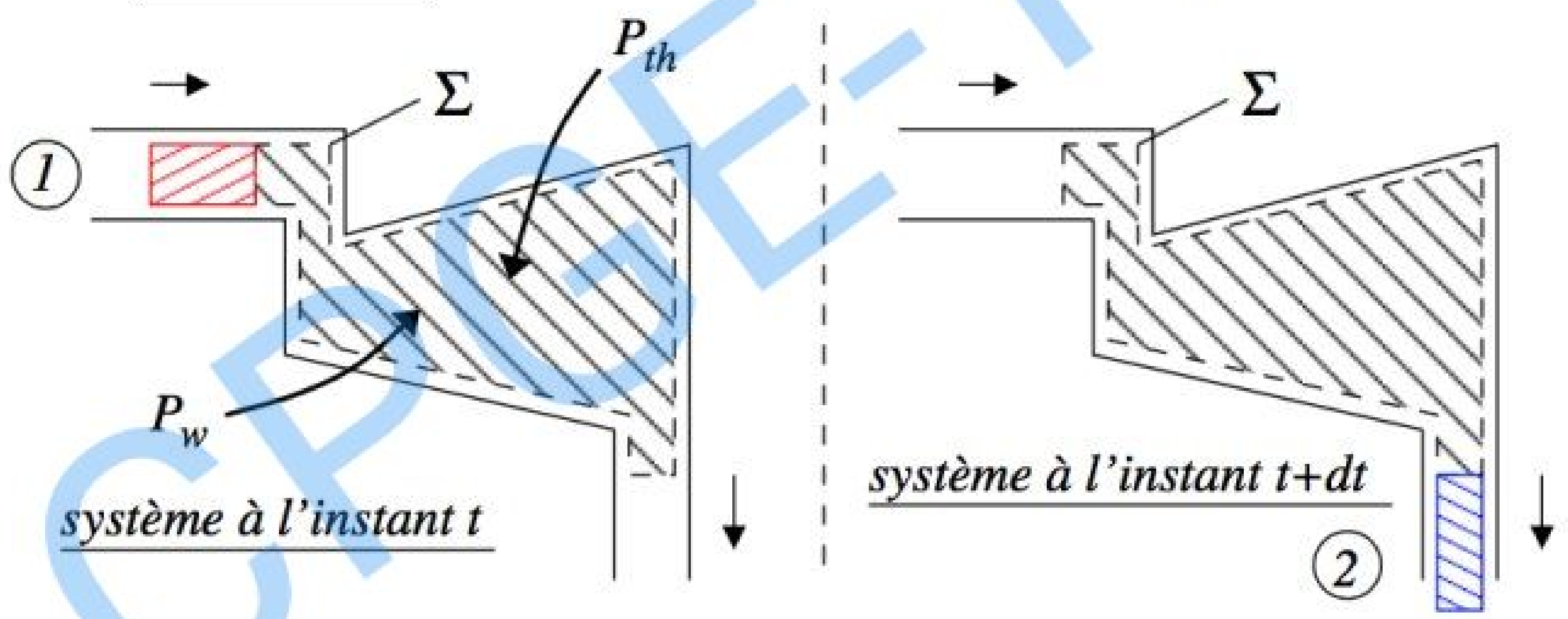
avec : CM = la loi de conservation de la masse, RFD = la relation fondamentale de la dynamique, TMC = le théorème du moment cinétique, TEC = le théorème de l'énergie cinétique, TH1 = le premier principe de la thermodynamique (avec $E_t = U + E_c + E_p$ l'énergie totale du système) et enfin TH2 = le second principe de la thermodynamique.

II. Bilans d'énergie macroscopiques

1. Bilans thermodynamiques

Compétence : exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire en vue de l'étude d'une machine thermique sous la forme
$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q$ et $\Delta s = s_e + s_C$

1.1 Expression du premier principe pour un écoulement stationnaire



A l'entrée du dispositif, le fluide est caractérisé par les grandeurs P_1 (pression), T_1 (température), v_1 (vitesse), μ_1 (masse volumique), u_1 (énergie cinétique massique)…, et à la sortie par P_2, T_2, v_2, μ_2…

Pour ce système fermé S, on applique le **premier principe de la thermodynamique** pour réaliser un **bilan d'énergie totale** :

$$d(U + E_c + E_p) = \delta Q_{ext} + \delta W_{ext}$$

Le régime étant **stationnaire**, les énergies du fluide contenues dans le volume de contrôle ouvert ne varie pas, et la **variation d'énergie** pour le **système fermé** s'identifie à la **différence des grandeurs entre sortie (2) et entrée (1)** :

$$\begin{aligned} d(U + E_c + E_p) &= (\delta U_2 + \delta E_{c,2} + \delta E_{p,2}) - (\delta U_1 + \delta E_{c,1} + \delta E_{p,1}) \\ &= \delta m_2(u_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - \delta m_1(u_1 + e_{c,1} + e_{p,1}) \\ &= \delta m\left[(u_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (u_1 + e_{c,1} + e_{p,1})\right] \end{aligned}$$

En effet, en régime stationnaire le débit massique se conserve, la masse qui sort du système pendant dt est égale à la masse qui y rentre : $\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$.

Il faut maintenant exprimer les **transferts énergétiques reçus** pendant dt :
- on définit **q le transfert thermique massique reçu** $\boxed{q = \frac{\delta Q_{ext}}{\delta m}}$ par le système à l'intérieur de la surface de contrôle (combustion, résistance chauffante, échangeur thermique…)
- pour le travail des forces extérieures, on distingue le **travail des forces de pression** $\boldsymbol{\delta W_p}$ à la frontière du système S, et le **travail mécanique utile reçu** $\boldsymbol{\delta W_u}$ par le système à l'intérieur de la surface de contrôle (compresseur, pâles d'éoliennes…) **:** $\boldsymbol{\delta W_{ext} = \delta W_p + \delta W_u}$. On définit alors **$w_u$ le travail mécanique massique utile** $\boxed{w_u = \frac{\delta W_u}{\delta m}}$

→ En évaluant les travaux des forces de pression en amont et en aval de l'écoulement, et en définissant **h l'enthalpie massique** $\boxed{h = u + \frac{P}{\mu}}$
Montrer que **l'expression du premier principe** est :

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q}$$

Dans le cas de la pesanteur comme seule force extérieure dérivant d'une énergie potentielle : $E_p = mgz$ -> $e_p = gz$ **l'énergie potentielle massique de pesanteur**

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_u + q}$$

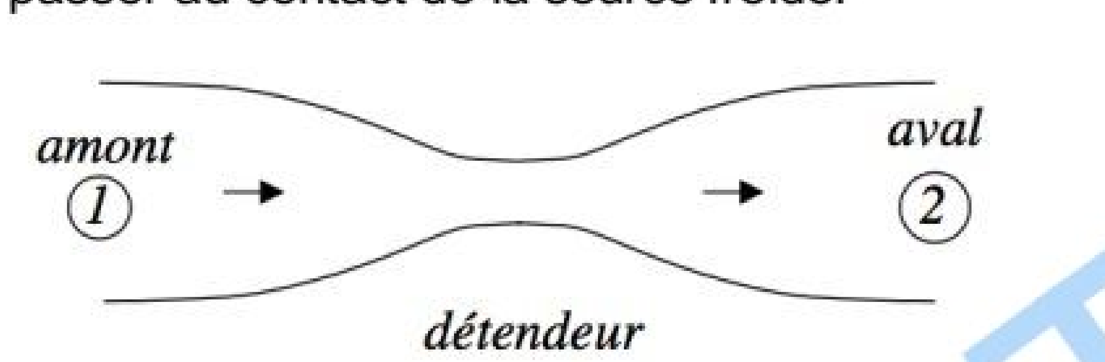
Le premier principe appliqué à un système ouvert fait donc jouer un rôle important à l'enthalpie, dont on avait déjà pu constater l'intérêt en chimie.

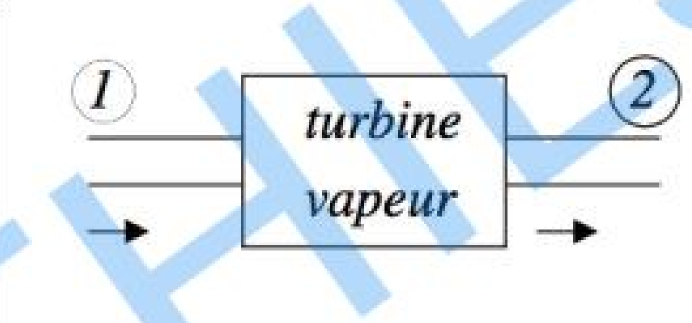
En termes de **puissance**, le **débit massique** devient un **outil indispensable**, car $w_u\, D_m = \frac{\delta W_u}{\delta m}\frac{\delta m}{dt} = \frac{\delta W_u}{dt} = P_u$, et l'expression du premier principe se traduit par :

$$\boxed{D_m\left(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p\right) = P_u + P_{th}}$$

➔ **Application au cas d'un détendeur : détente de Joule-Thomson**

Dans les **machines réfrigérantes**, le fluide passe au sein d'un détendeur avant de passer au contact de la source froide.





Au sein du détendeur, le fluide ne reçoit ni transfert thermique ni travail mécanique utile. Raisonnablement, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle de pesanteur, et pas de variation de l'énergie cinétique. On en déduit un **bilan isenthalpique** : $\boldsymbol{\Delta h = 0}$. La conservation de l'enthalpie massique permet de déterminer l'état du fluide (composition, pression et température) à la sortie du détendeur, avant l'entrée dans l'échangeur thermique.

➔ **Application au cas d'une turbine à vapeur**

Au sein d'une **turbine à vapeur**, la **phase motrice** est **associée à la détente de la vapeur au contact de la turbine** : en se détendant **la vapeur** sous haute pression **fournit** à la turbine de **l'énergie mécanique**.

Prenons le cas d'une turbine qui fonctionne selon les conditions suivantes :

	amont	aval
Pression	$P_1 = 6 \times 10^6$ Pa	$P_2 = 9,5 \times 10^4$ Pa
enthalpie massique	$h_1 = 3,28$ MJ/kg	$h_2 = 2,67$ MJ/kg
vitesse	$v_1 = 160$ m/s	$v_2 = 80$ m/s
Débit massique	$D_{m,1} = 20$ kg/s	$D_{m,2} = 20$ kg/s

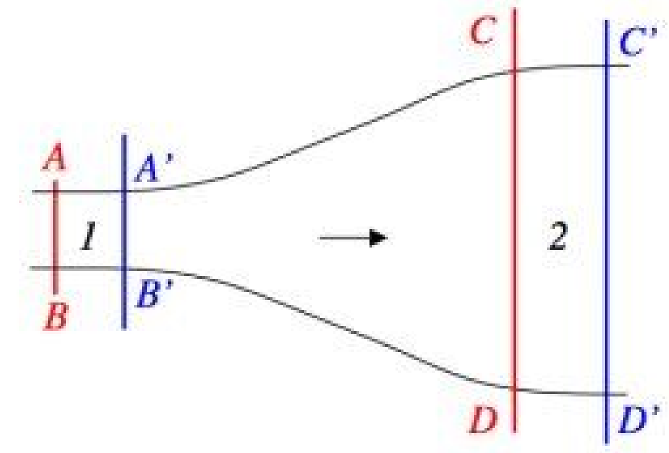
En négligeant le transfert thermique, le premier principe conduit à :

$P_u = D_m\left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2}{v_2}^2 - \frac{1}{2}{v_1}^2\right) = -12{,}4$ MW

La puissance mécanique utile reçue est bien négative, la vapeur cède de l'énergie à la turbine.

Remarquons que $\left|\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2(h_2 - h_1)}\right| \approx 1{,}6\,\%$ la variation d'énergie cinétique est négligeable devant la variation d'enthalpie.

1.2 *Expression du deuxième principe pour un écoulement stationnaire*



Prenons l'exemple d'un écoulement stationnaire dans une tuyère (section variable). Le système fermé S est constitué du fluide contenu dans ABCD à l'instant t et A'B'C'D' à l'instant t+dt (ci-contre).

Le deuxième principe de la thermodynamique appliqué à S entre t et t+dt s'écrit : $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_c \geq 0$

En régime stationnaire, la variation d'entropie vaut : $dS = \delta S_2 - \delta S_1 = \delta m(s_2 - s_1)$

Avec s_1 et s_2 les entropies massiques en amont et aval.

Le **bilan d'entropie** s'écrit donc : $\boxed{\Delta s = (s_2 - s_1) = s_e + s_c}$

➔ **Application au cas de la détente de Joule-Thomson d'un gaz parfait**

En s'écoulant à travers une membrane fixe, un fluide subit une diminution de pression appelée détente de Joule-Thomson, lorsque le travail utile et le transfert thermique sont nuls : parois calorifugées par exemple.

On néglige ici les variations d'énergies cinétique et potentielles.

- parois calorifugées : q = 0 et $\boldsymbol{s_e = 0}$
- premier principe $\Delta h = w_u + q = 0$ qui entraîne $\Delta T = 0$ pour un gp
- pour un gp $\Delta s = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M}\ln\frac{P_2}{P_1} = \frac{R}{M}\ln\frac{P_1}{P_2}$

- finalement $s_c = \Delta s = \frac{R}{M} \ln \frac{P_1}{P_2}$

2. Bilan d'énergie mécanique pour un écoulement parfait : relation de Bernoulli

➔ Modèle de l'écoulement parfait

Compétence : utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite

*Un écoulement **parfait** est un écoulement où **tous les phénomènes de diffusion sont négligeables** : **diffusions thermique et visqueuse**. Il sera par définition **réversible et adiabatique**.*

Ce modèle est ainsi associé à la **conservation de l'énergie totale** du système étudié, à la manière d'une bille roulant sans glissement. Un écoulement parfait coule indéfiniment une fois mis en mouvement : un bateau ayant reçu une impulsion initiale pourrait traverser l'océan sans moteur, un fluide mis en mouvement dans une conduite pourrait s'écouler à perpétuité. D'un **point de vue thermodynamique**, cet écoulement est **isentropique**.

Ce modèle, apriori peu réaliste, est en fait bien **approprié aux écoulements industriels à grand nombre de Reynolds**, où les effets de la viscosité sont négligeables, dominés par les effets inertiels, et ce **en l'absence d'échanges thermiques**. Un écoulement laminaire ne sera donc pas modélisable par ce type d'écoulement, et le modèle du fluide parfait s'appliquera **en dehors de la couche limite**, très localisée à nombre de Reynolds élevé.

➔ Approximation de l'écoulement parfait dans une conduite

Dans de nombreux cas, **l'écoulement d'un fluide réel à grand nombre de Reynolds** dans une conduite peut être étudié à partir de son écoulement moyen : **la vitesse du fluide** est alors quasiment **uniforme sur toute section droite de la conduite** (à l'exception de la zone de couche limite).
Cette **approximation néglige les pertes d'énergie mécanique** et donc de pression dues aux dissipations visqueuses et turbulentes, ce qu'on mesure par une perte de charge en hydraulique.

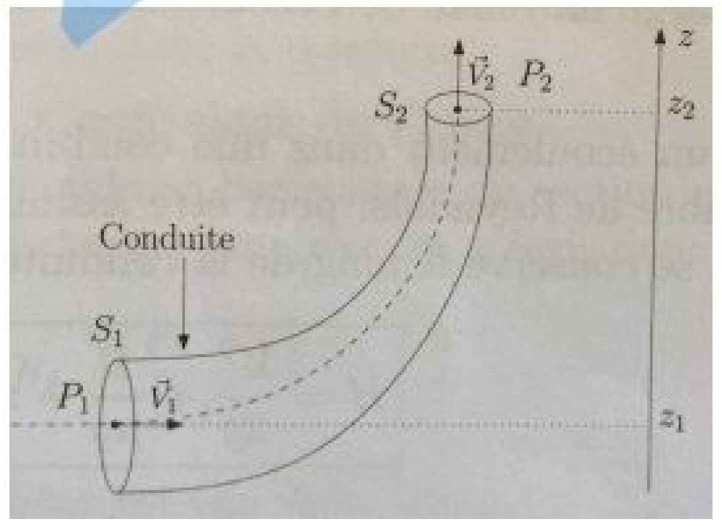
➔ Ecoulement parfait incompressible et homogène

D'un point de vue énergétique, la puissance des actions intérieures au fluide est liée aux forces de viscosité exercées entre particules de fluide et au caractère compressible de l'écoulement. On admettra alors le résultat suivant :

*Dans un écoulement parfait et incompressible, **la puissance des actions intérieures est nulle**.*

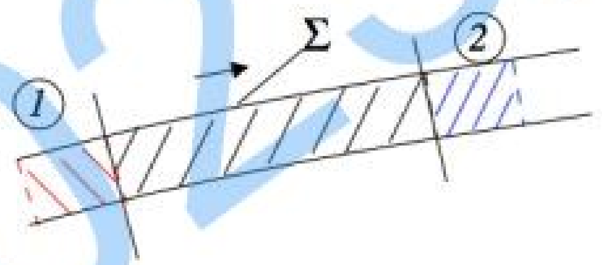
Pour cet écoulement incompressible, le **débit volumique** sera **constant** :

$$\boxed{D_v = v_1\, S_1 = v_2\, S_2}$$



➔ Energie mécanique du système fermé

On considère le système fermé ci-contre, constitué par une surface de contrôle ouverte qui est un tube de courant, il s'appuie par exemple sur la conduite de l'écoulement.



L'énergie mécanique massique du système est $\mathbf{e_m = e_c + e_p}$
- $\mathbf{e_c}$ **l'énergie cinétique massique ½ v^2**
- $\mathbf{e_p}$ **l'énergie potentielle massique** : en considérant un champ de pesanteur uniforme d'intensité g -> $\mathbf{e_p = g\, z}$ (z est la côte ascendante)

La variation d'énergie mécanique pendant dt pour le système fermé **en régime stationnaire** s'exprime :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = D_m\,(\Delta e_c + \Delta e_p) = D_m\left(\frac{1}{2}{v_2}^2 + g\, z_2 - \frac{1}{2}{v_1}^2 - g\, z_1\right)}$$

➔ Bilan macroscopique d'énergie mécanique

En l'absence de dispositif actif, tel qu'une pompe ou une turbine, les variations d'énergie mécanique résultent des travaux suivants:

- le travail des forces de pression exercées par le fluide en amont (positif) et en aval (négatif qui s'oppose à l'écoulement du fluide)
$\delta W_p = -P_2 S_2\, v_2 dt + P_1 S_1\, v_1 dt$ avec $dm = D_m\, dt = \mu\, v_1 S_1 = \mu\, v_2 S_2$

$$\delta W_p = \left(\frac{P_1}{\mu} - \frac{P_2}{\mu}\right) D_m\, dt \rightarrow \boxed{\frac{\delta W_p}{dt} = D_m\left(\frac{P_1}{\mu} - \frac{P_2}{\mu}\right)}$$

- le travail dû à l'action du fluide ou de la conduite situés sur le pourtour du tube de courant (faces latérales). Dans le modèle de l'écoulement parfait, l'absence de frottements par viscosité impose une **action latérale perpendiculaire à la surface** de contrôle, donc **perpendiculaire à la vitesse** de l'écoulement (le tube de courant est constitué de ligne de courant). Ce travail est donc **nul**.

- les **travaux des forces internes** à l'écoulement qui est **nul** dans le cadre de l'écoulement parfait

*En résumé, dans le cadre de l'écoulement parfait, incompressible, et stationnaire, le **bilan d'énergie mécanique** ne fait intervenir que le **travail des forces pressantes en amont et en aval** :* $dE_m = \delta W_p$.

➔ Bilan global : relation de Bernoulli

Compétence : énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène

Le bilan d'énergie mécanique appliqué au système fermé s'exprime par :

$$\frac{dE_m}{dt} = D_m\left(\frac{1}{2}{v_2}^2 + g\,z_2 - \frac{1}{2}{v_1}^2 - g\,z_1\right) = \frac{\delta W_p}{dt} = D_m\left(\frac{P_1}{\mu} - \frac{P_2}{\mu}\right)$$

Soit

$$\boxed{\frac{1}{2}{v_2}^2 + g\,z_2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}{v_1}^2 + g\,z_1 + \frac{P_1}{\mu}}$$

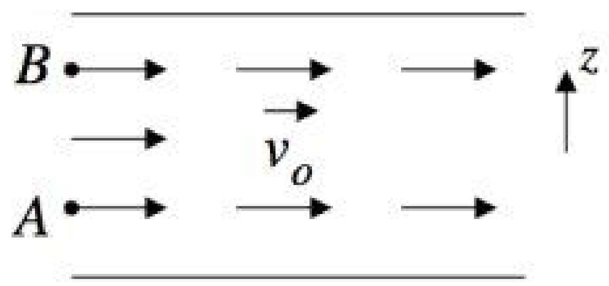
La surface de contrôle ayant été choisie de manière arbitraire, on obtient la **relation de Bernoulli**, valable **le long de toute ligne de courant** :

Dans un référentiel galiléen, avec un axe vertical orienté vers le haut, pour un écoulement parfait, incompressible et homogène, et stationnaire, l'énergie massique mécanique $\boxed{\frac{1}{2}v^2 + g\,z + \frac{P}{\mu}}$ *se conserve (en J.kg⁻¹)*

En appliquant le bilan thermodynamique global, réalisé précédemment :
$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q = 0$ **->** en l'absence de travail utile et d'échange thermique, avec $\Delta h = \Delta\left(u + \frac{P}{\mu}\right) = \frac{P_2}{\mu} - \frac{P_1}{\mu}$ car $\Delta u = 0$ <- évolution adiabatique.
Il vient $\frac{P_2}{\mu} - \frac{P_1}{\mu} + \frac{1}{2}{v_2}^2 - \frac{1}{2}{v_1}^2 + g\,z_2 - g\,z_1 = 0$ on retrouve naturellement **la relation de Bernoulli**, qui traduit **la conservation de l'énergie mécanique**.
En l'absence d'écoulement, on retrouve la loi de la statique des fluides ! Si l'écoulement est irrotationnel, la relation est vraie dans l'intégralité de l'écoulement.

➔ Complément : écoulement uniforme

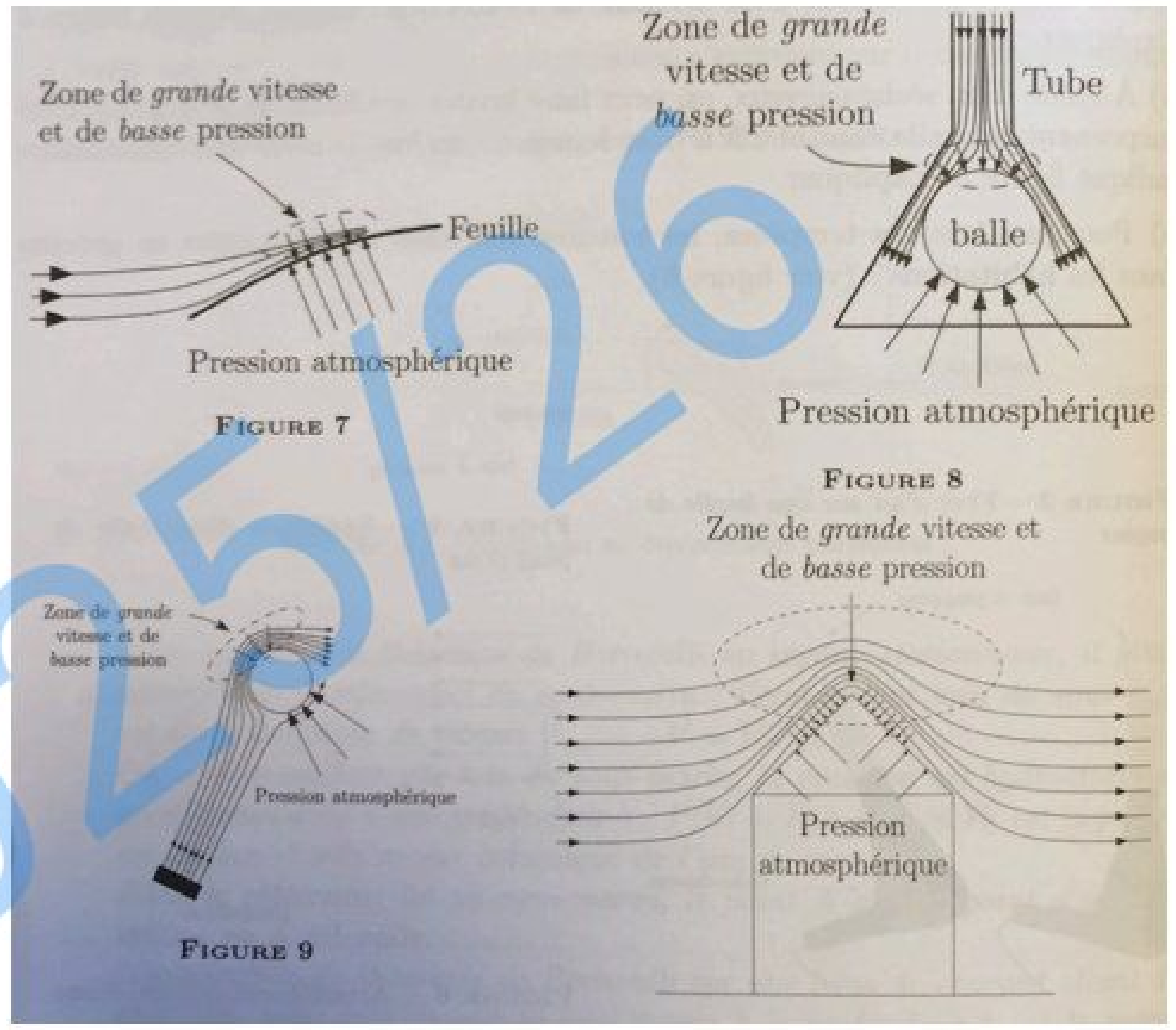
*Au sein d'un écoulement parfait, stationnaire, et **uniforme**, la relation de la statique des fluides s'applique :* $P_A + \mu g\, z_A = P_B + \mu g\, z_B$



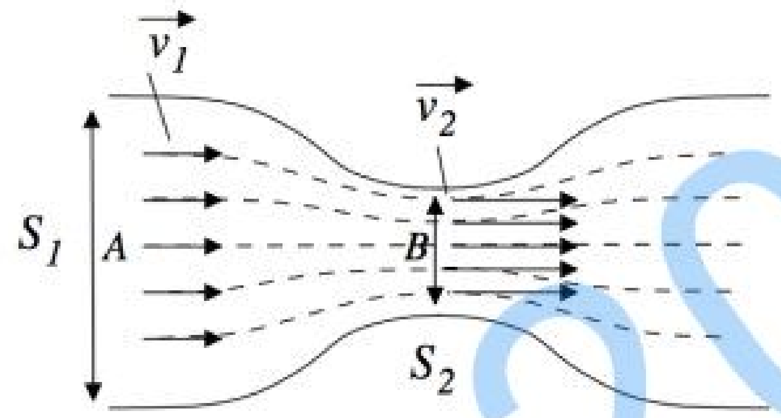
Quelques applications en vidéo - ressources
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-Bernoulli.xml

3. Effet Venturi et applications

Compétences : décrire l'effet Venturi, et des applications : tube de Pitot, débitmètre



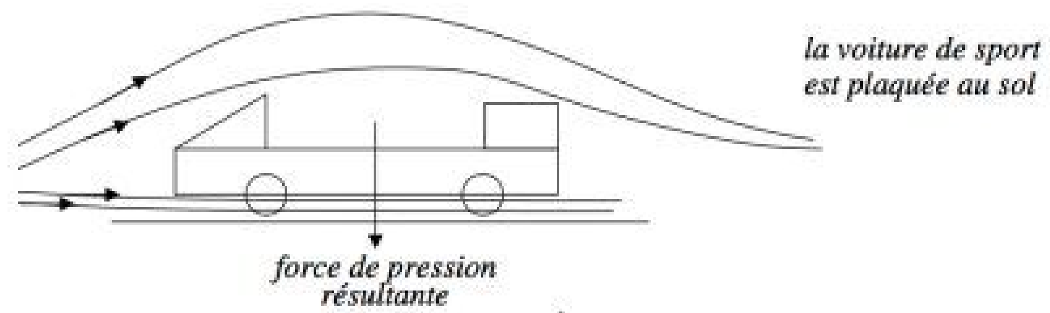
➔ Principe de l'effet Venturi

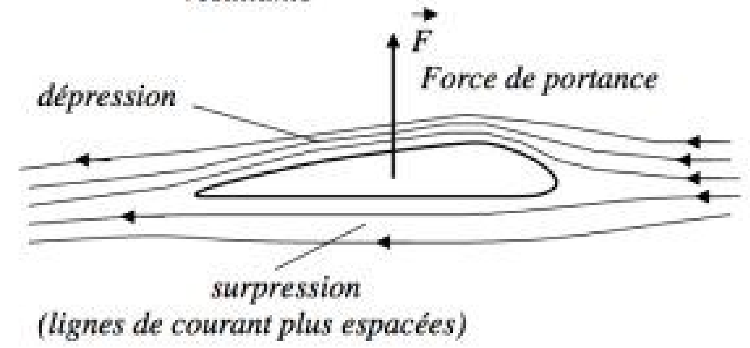


Pour illustrer le principe de l'effet Venturi, on considère un écoulement parfait, incompressible, stationnaire dans une canalisation horizontale de section variable (ci-dessus à gauche). Le champ de vitesse est supposé uniforme sur les portions cylindriques.
En appliquant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B :
$\frac{1}{2}{v_2}^2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}{v_1}^2 + \frac{P_1}{\mu}$ avec $D_v = v_1\,S_1 = v_2\,S_2$ pour un fluide incompressible
Pour $S_2 < S_1$ -> $v_2 > v_1$ et donc $P_2 < P_1$

***Effet Venturi** : les régions de **faibles sections** sont des régions de **grandes vitesses et de basse pression**.*

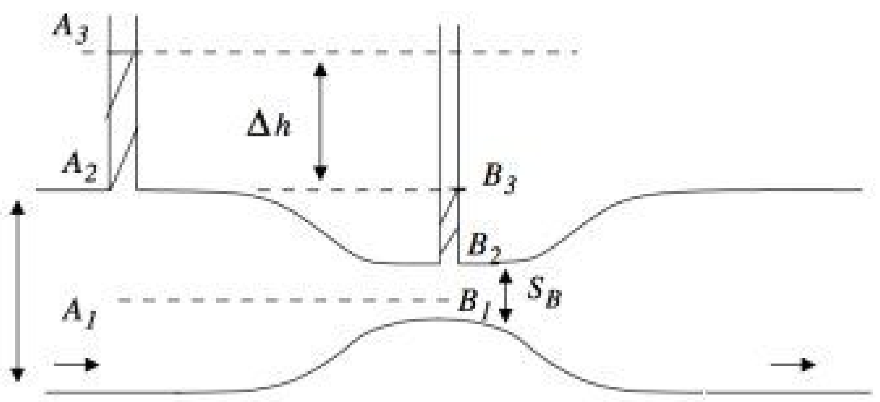
Cet effet permet d'apporter une première interprétation de la portance, et de l'effet de sol (ci-contre), de la lévitation d'une balle de ping-pong avec un sèche cheveu… (ci-dessus). Il est mis à profit dans des capteurs permettant de caractériser un écoulement : mesures de vitesse, de débit.





➔ Application débitmètre avec capteur à manomètre différentiel : le tube de Venturi

Dans un **tube de Venturi**, on fait se succéder sur une conduite cylindrique un cône convergent puis un cône divergent (en général plus long que le convergent). La mesure est réalisée à l'aide d'un **capteur manométrique différentiel** qui mesure la différence de pression entre un point situé en amont et le cœur de l'étranglement de la conduite. On négligera l'effet de la pesanteur sur l'écoulement.



→ Etablir l'expression de la différence de pression mesurée $\Delta P = \mu g \Delta h = P_{A1} - P_{B1}$:

$$\boxed{\Delta P = \frac{\mu}{2}\left(\frac{S_A{}^2}{S_B{}^2} - 1\right) v_A{}^2}$$

Quelle est la dépendance du débit volumique D_V dans la conduite (en amont de l'étranglement) avec la différence de pression ?

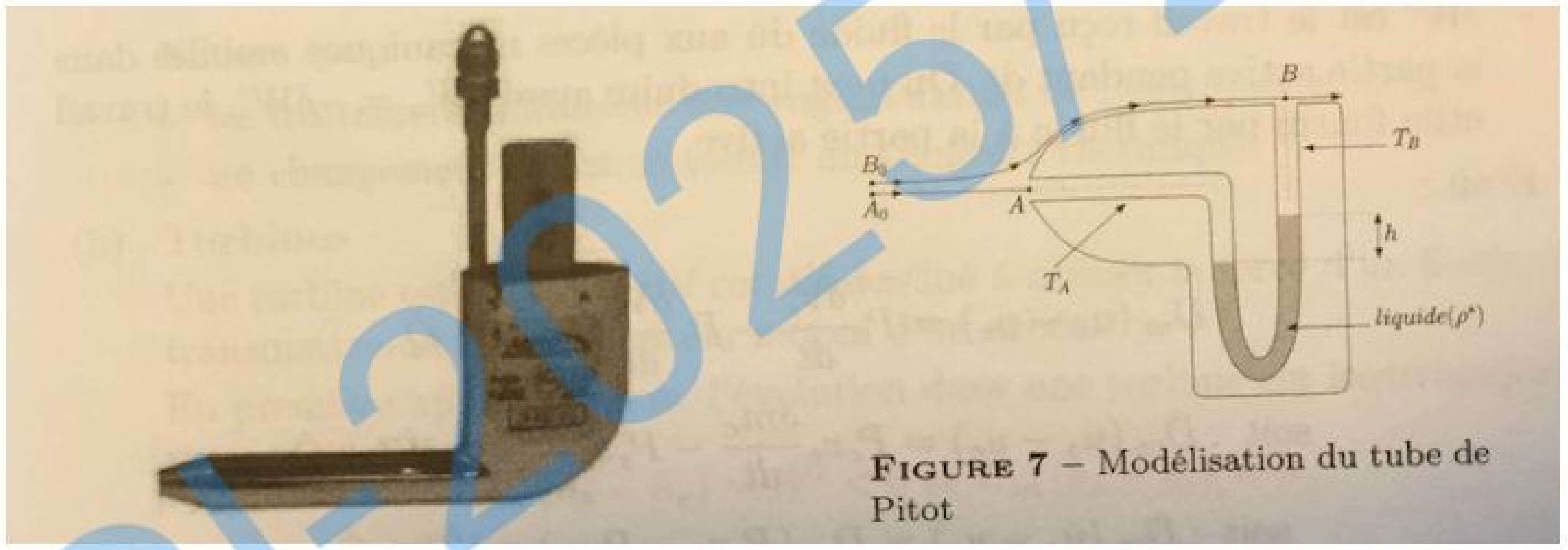
Une conduite d'eau de diamètre d = 40 mm présente un étranglement défini par le rapport de section k = S_A/S_B = 1,6. Un écoulement stationnaire de débit D_V = 6,0 $m^3.h^{-1}$ est établi dans la conduite.

→ Déterminer la différence de pression détectée par le tube de Venturi. Pour suivre l'évolution du débit en cours d'utilisation, vaut-il mieux mesurer la dépression ΔP ou la pression dans l'étranglement ?

Ce **dispositif Venturi** constitue un très bon **compromis entre précision et faible perte de charge**. On atteint couramment 2% de précision, pour une faible perturbation induite sur l'écoulement, bien moindre qu'avec un dispositif volumétrique, comme le compteur à hélice utilisé pour les mesures domestiques de

consommation d'eau (ci-contre). Cependant, la perte de charge induite sera d'autant plus élevée que la vitesse débitante dans la conduite est élevée.

➔ Application vélocimètre : sonde de Pitot



Une sonde de Pitot permet de **déterminer la vitesse** d'un avion par rapport à l'air ambiant via une **mesure différentielle de pression**. Ce dispositif, présenté ci-dessus, est fixé sur le fuselage de l'avion, hors de la couche limite, de manière à être **positionné dans la zone de l'écoulement parfait**.

La sonde est constituée de deux tubes (T_A) et (T_B) coudés concentriques, disposés de la manière suivante :

- le tube extérieur (T_B) s'ouvre perpendiculairement à l'écoulement du fluide en B : la vitesse y est la même que celle de l'écoulement, la **pression P_B** à l'intérieur de ce tube est donc égale à la pression « ambiante » ou **pression statique**

selon la ligne de courant de B_0 à B -> $\frac{P_\infty}{\mu} + \frac{v_\infty{}^2}{2} = \frac{P_B}{\mu} + \frac{v_\infty{}^2}{2} \rightarrow \; P_B = P_\infty$

- le tube intérieur (T_A) est parallèle à l'écoulement du fluide, il est ouvert en son bout en A, face au flux d'air, et **v_A = 0 point d'arrêt** : la **pression P_A** est donc la pression totale, somme de la **pression statique** et de la **pression dynamique**

selon la ligne de courant de A_0 à A -> $\frac{P_\infty}{\mu} + \frac{v_\infty{}^2}{2} = \frac{P_A}{\mu} \rightarrow \; P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\mu v_\infty{}^2$

On en déduit la **vitesse de l'écoulement** $\boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\mu}\Delta P} \;\; \text{et} \;\; \Delta P = P_A - P_B}$

Le manomètre différentiel est par exemple constitué par une membrane sur laquelle est fixée une jauge de contrainte, ou plus simplement on peut disposer un liquide de densité connue entre les deux tubes (fig 7 ci-dessus).

4. Généralisation des bilans macroscopiques au cas de la non-conservation de l'énergie mécanique

4.1 Pertes de charges régulières et singulières dans une conduite

Compétence : relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique

On s'intéresse ici à une manière de caractériser l'écart à l'idéalité de l'écoulement d'un fluide réel dans une conduite.

➔ Généralisation de la notion de charge

Du fait des dissipations internes au sein de l'écoulement (frottements, turbulence…), la relation de Bernoulli n'est plus satisfaite, on observe une inégalité entre les termes en amont et en aval. On définit ainsi la perte de charge par la différence :

$$\boxed{\Delta P_C = \left(P_1 + \frac{1}{2}\mu v_1{}^2 + \mu g z_1\right) - \left(P_2 + \frac{1}{2}\mu v_2{}^2 + \mu g z_2\right)}$$

Plus rigoureusement, on peut définir la charge moyenne de l'écoulement H, ou hauteur manométrique, par : $\boxed{H = \frac{P}{\mu g} + \frac{v^2}{2g} + z}$

Pour un écoulement parfait, cette charge se conserve. Pour un écoulement réel :

$$\boxed{\Delta H = \left(\frac{P_1}{\mu g} + \frac{v_1{}^2}{2g} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\mu g} + \frac{v_2{}^2}{2g} + z_2\right)}$$

$$\boxed{\Delta P_C = \mu g\, \Delta H}$$

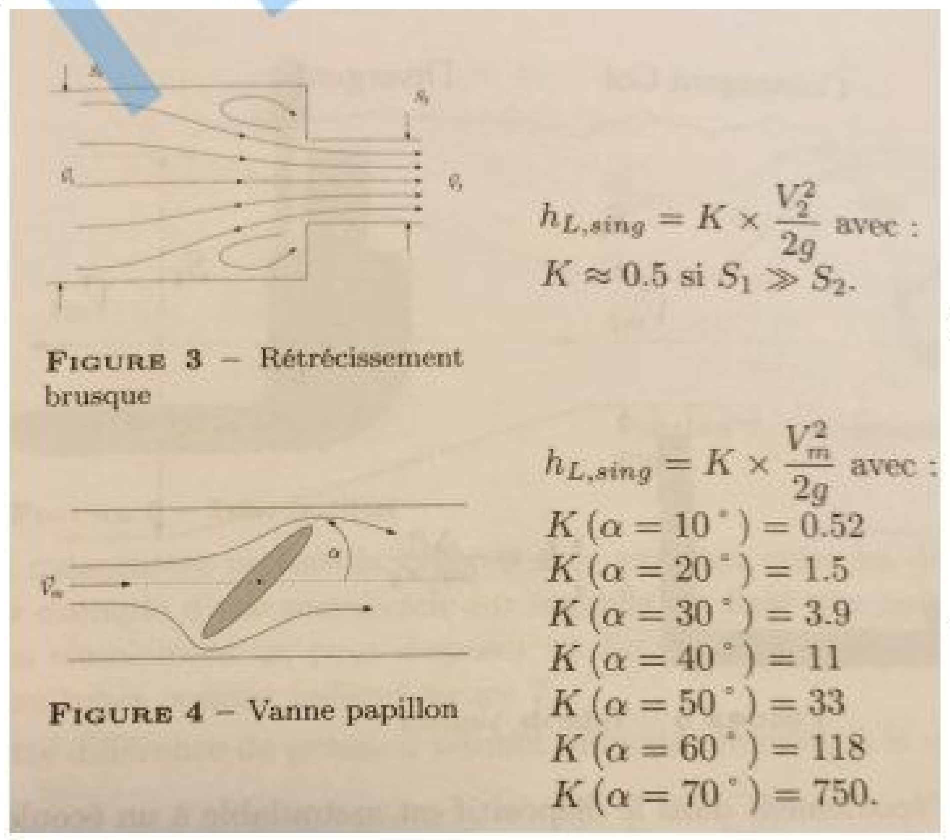
Un bilan d'énergie cinétique montre alors que $\Delta H = \frac{P_{int}}{\mu g D_V}$ -> cette variation est dûe à la puissance des dissipations internes P_{int} de l'écoulement.

➔ Pertes de charges régulières

Nous avons établi dans le chapitre précédent que la **perte de charge régulière** pour un écoulement laminaire incompressible, et stationnaire, dans une conduite (de section constante) est déterminée par la loi de Hagen-Poiseuille. Elle dépend principalement de la viscosité du fluide, de son débit volumique, et des paramètres géométriques de la conduite. Pour un écoulement turbulent, elle dépend notamment du nombre de Reynolds et de la rugosité de la conduite.

➔ Pertes de charges singulières

Dans une installation complexe, de multiples composants perturbent l'écoulement, induisant un écart à la situation idéale et donc une perte de charge. Ces pertes de **charges singulières** ne sont plus réparties tout au long de l'écoulement mais apparaissent de manière **localisée**, sur des coudes, des raccords entre canalisations de sections différentes, des bifurcations, des vannes…



Pour chaque type de cause, des règles ou modèles, plus ou moins évolués, permettent de déterminer la valeur de la perte de charge singulière (exemples ci-avant).

4.2 ***Prise en compte d'un élément actif***

Compétence : effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle : pompe ou turbine

L'utilisation d'un **élément actif** comme une pompe alimentée électriquement permet de fournir une certaine puissance à l'écoulement.
Partant de l'équation qui serait écrite en l'absence de pompe, entre sortie et entrée, on ajoute un terme qui est homogène à un **travail massique w_i** de l'élément actif :

$$\boxed{\frac{1}{2}v_2{}^2 + g\, z_2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}v_1{}^2 + g\, z_1 + \frac{P_1}{\mu} + w_i}$$

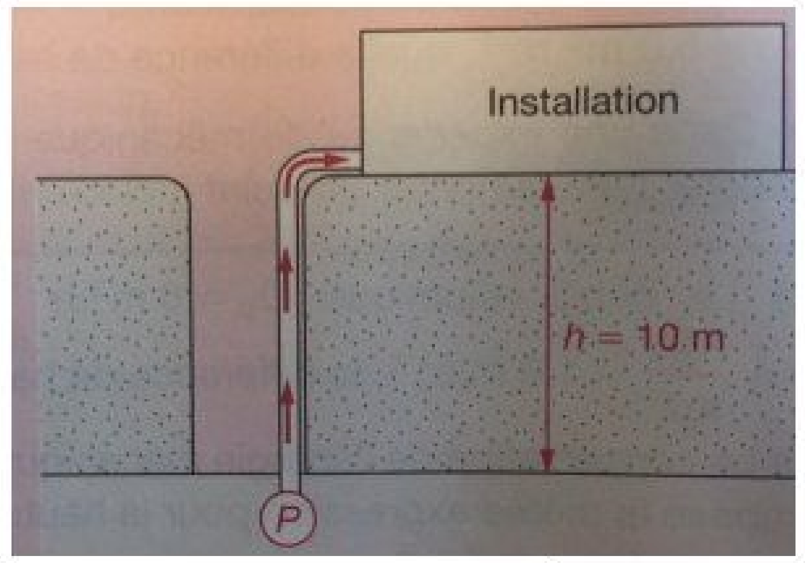
En terme de puissance :

$$\boxed{D_m\left(\frac{1}{2}v_2{}^2 + g\, z_2 + \frac{P_2}{\mu} - \frac{1}{2}v_1{}^2 - g\, z_1 - \frac{P_1}{\mu}\right) = P_i}$$

Les valeurs de w_i ou P_i sont caractéristiques de l'élément actif, indiquées par exemple sur la plaque signalétique de la pompe.

➔ Ordre de grandeur d'une puissance nécessaire

Une pompe immergée à 10 m sous terre doit permettre la remontée de l'eau dans une installation située à la surface (ci-contre). La pression du liquide au niveau du captage est voisine de la pression atmosphérique. Le débit visé D_V est de 7 $m^3.h^{-1}$ avec une pression dans l'installation supérieure à la pression atmosphérique de 2,5 bar. Les sections des conduites ne varient pas, et on se place en régime stationnaire. On ignore ici les pertes de charges, et on cherche à estimer un ordre de grandeur de la puissance nécessaire pour maintenir l'écoulement.



→ Estimer le travail indiqué nécessaire, et donner sa valeur $J.kg^{-1}$. En déduire la puissance nécessaire de la pompe P_i.

Comparer à la puissance de fonctionnement d'un appareil ménager courant. Peut-on conclure sur l'importance de la consommation électrique pour ce fonctionnement ?

III. *Bilans dynamiques macroscopiques*

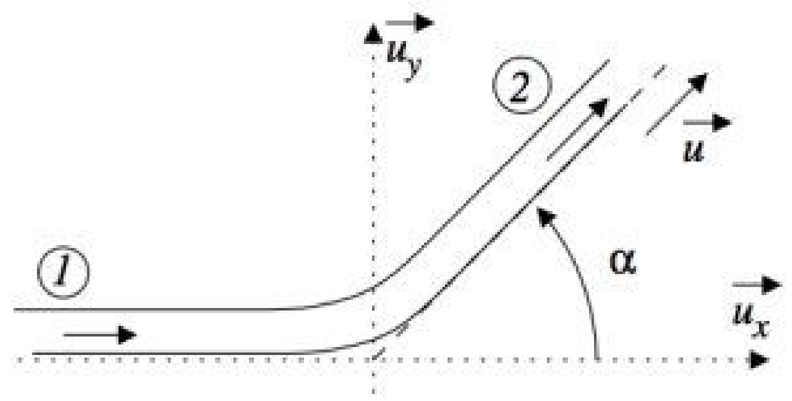
On s'intéresse maintenant à des systèmes ouverts industriels avec écoulement de fluide, dont le fonctionnement doit être analysé par un bilan mécanique de quantité de mouvement ou de moment cinétique : propulsion liée à un écoulement gazeux dans un réacteur qui emporte une certaine quantité de mouvement, mise en rotation d'une roue dans une turbine par transfert de moment cinétique… Les techniques de résolution sont les mêmes que celles utilisées pour les bilans énergétiques.

1. Bilans de quantité de mouvement : exemple du tuyau coudé

Notion : loi de la quantité de mouvement pour un système fermé
Compétences :
- faire l'inventaire des forces extérieures
- effectuer un bilan de quantité de mouvement

➔ Présentation du cas pratique étudié : tuyau coudé

Pour mettre directement en application **un bilan de quantité de mouvement**, on analyse ici le cas pratique d'une **canalisation coudée** horizontale de section droite (ci-contre). Le bilan de quantité de mouvement a pour **but** de **déterminer l'action de l'écoulement sur la canalisation**.
L'écoulement de l'eau est considéré comme incompressible et homogène, parfait et stationnaire dans une conduite coudée de section constante.



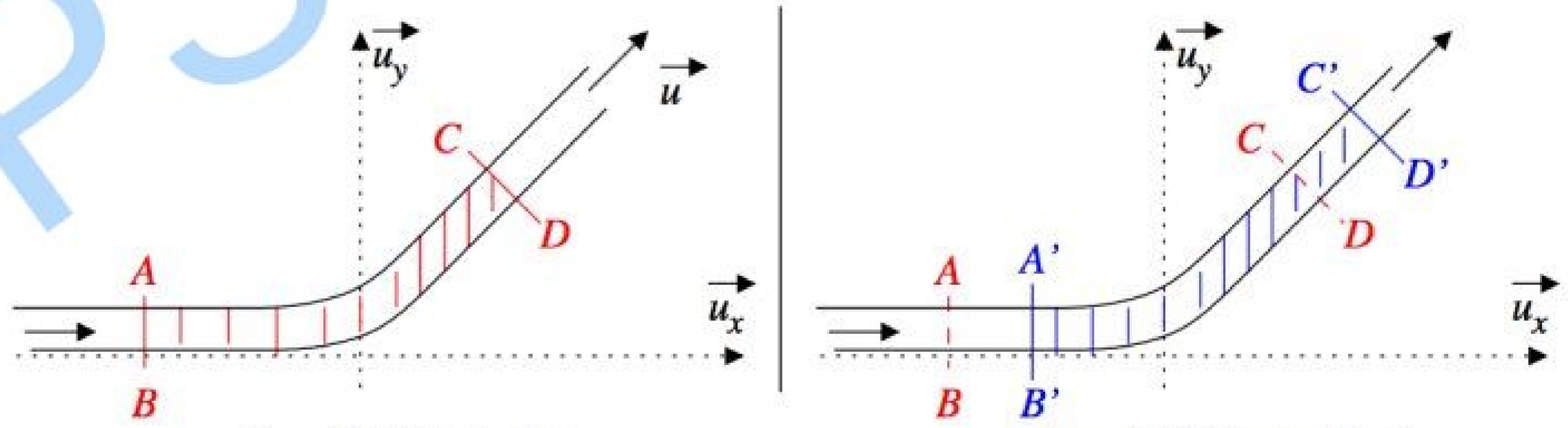
On négligera l'action de la pesanteur pour une déflexion faible de la conduite entre entrée et sortie du coude.

➔ Analyse préliminaire : exploitation du caractère parfait, incompressible, stationnaire de l'écoulement

- pour cet écoulement incompressible le vecteur vitesse est à flux conservatif :
$v_1 S_1 = v_2 S_2 \ \rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{v_1 = v_2 = v}}$ -> la **vitesse du fluide** est **la même tout au long du tuyau** (on a supposé une vitesse uniforme sur une section droite de la conduite, hypothèse justifiée par le profil de vitesse pour un écoulement parfait)

- la relation de Bernoulli appliquée à une ligne de courant entre entrée et sortie du coude :
$\frac{1}{2}v^2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P_1}{\mu} \ \rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{P_1 = P_2 = P}}$
La **pression** est **la même tout au long du tuyau.**

➔ Bilan de quantité de mouvement : déterminer la force résultante



système S à l'instant t | *système S à l'instant t+dt*

Le système fermé à considérer est défini ci-dessus. On lui applique la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel galiléen de la canalisation :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} \ \rightarrow \ d\vec{p} = \overrightarrow{F_{ext}}\, dt}$$

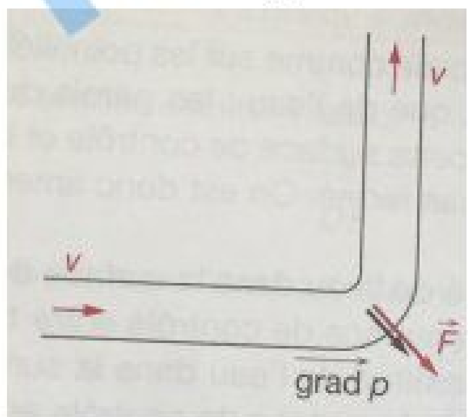
→ Exploiter un bilan de quantité de mouvement pour établir la variation de quantité de mouvement pour S en régime stationnaire, en projection selon le repérage.

→ Réaliser un inventaire des forces extérieures appliquées à S (on néglige toujours la pesanteur) pour établir que la force résultante de la conduite sur le fluide $\overrightarrow{F_{c\to f}}$ s'exprime par : $\boxed{\overrightarrow{F_{c\to f}} = (\mu v^2 + P)\, S\, [(\cos\alpha - 1)\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\, \overrightarrow{u_y}]}$

➔ Analyse de la force résultante

Les caractéristiques du fluide en amont et en aval du coude sont suffisantes pour déterminer l'action du fluide sur la canalisation : nous n'avons pas eu besoin de savoir ce qu'il se passe exactement au niveau du coude.

Quand on analyse plus précisément cette force, nous observons qu'elle comporte deux termes : le **premier proportionnel à P compense les forces de pression** exercées en entrée et en sortie du coude, **le second proportionnel à μv^2** est le résultat d'un **gradient de pression local** au niveau du coude, en effet les lignes de courant sont courbées au niveau du coude. Les forces de pression exercées par le fluide sur la paroi « extérieure au coude » sont alors plus intenses (vitesse plus faible) que celles exercées sur la paroi « intérieure » (vitesse plus rapide), ce qui engendre cette force due à l'écoulement.



Analyse en fonction de l'angle du coude

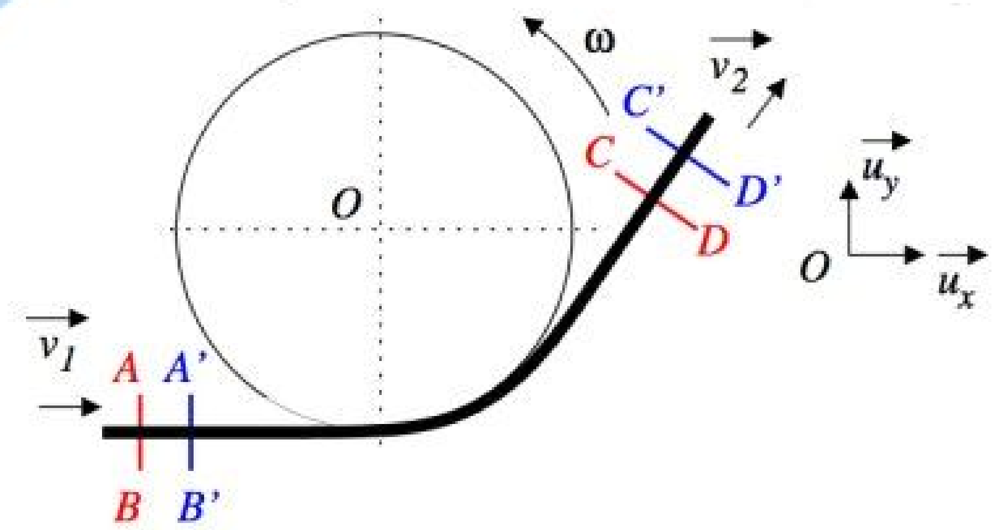
- pour $\alpha = 0$ la force résultante est nulle, l'écoulement n'agit pas sur la canalisation
- pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\overrightarrow{F_{c\to f}} = (\mu v^2 + P)\, S\, [-\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}]}$ la force est dirigée selon la bissectrice du coude
- pour α quelconque la force est dirigée selon la bissectrice du coude

2. Bilans de moment cinétique : exemple de la turbine

Notion : loi de la quantité du moment cinétique pour un système fermé
Compétences : effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine

➔ Modélisation du dispositif industriel

Le principe d'une turbine repose sur **l'entraînement d'une roue à aubes par l'écoulement d'un fluide**, comme un jet d'eau. Cette roue est intégrée à un dispositif mécanique, pouvant aller d'une meule à écraser le grain à un alternateur destiné à la production d'électricité…



La partie mobile de la turbine est le **rotor**, modélisé par un disque de rayon a et de moment d'inertie J. **En régime stationnaire**, il tourne à la **vitesse angulaire constante ω** autour de l'axe fixe Oz passant par O.
Le rotor est soumis à un **couple moteur de la part du jet d'eau** qui l'entraîne, et à un **couple résistant Γ** (négatif), qui **modélise le dispositif mécanique** auquel la turbine est couplée.

Dans le référentiel terrestre, l'eau arrivant **en entrée** à la **vitesse $\overrightarrow{v_1}$** frappe le rotor (constitué d'aubes) qui la défléchit, et l'eau possède finalement une **vitesse de sortie $\overrightarrow{v_2}$**. On note **D_m le débit massique** du jet d'eau. Les vitesses d'entrée et de sortie sont connues.
On néglige l'action de la pesanteur. Le jet d'eau possède une épaisseur faible devant le rayon a de la roue.

➔ Bilan de moment cinétique : déterminer le couple résultant et l'équation d'évolution de la vitesse angulaire

On applique le théorème du moment cinétique au point O pour le système fermé S (ci-dessus), constitué par le rotor et l'eau, entre t et t+dt, pour un écoulement stationnaire :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt}(S) = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F_{ext}}) \;\rightarrow\; d\vec{L}_O(S) = \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{F_{ext}})\, dt}$$

On rappelle ici l'expression du moment cinétique d'un objet de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$: $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v} \;\; \rightarrow \vec{L}_O = mvd\,\vec{u}_z$ avec d le bras de levier, qui est ici environ égal à a : $\vec{L}_O \cong mva\,\vec{u}_z$.

→ Montrer que la variation du moment cinétique pour S, entre t et t+dt, en projection selon (Oz) s'exprime par : $\boldsymbol{dL_0 = J\,\frac{d\omega}{dt}\,dt + \,a\,D_m(v_2 - v_1)\,dt}$

→ Montrer que le moment des forces de pression exercées sur le fluide est nul. En déduire l'équation d'évolution de la vitesse angulaire :

$$\boldsymbol{J\,\frac{d\omega}{dt} = \,a\,D_m(v_1 - v_2) - \,\Gamma}$$

Avec le couple résistant $\vec{\Gamma} = \,-\,\Gamma\,\vec{u}_z$

L'accélération angulaire de la roue est liée à deux causes : une **diminution due à l'entraînement d'une charge**, et le **terme moteur dû à l'action de l'eau**, intervenant par la variation de vitesse de l'écoulement.
Pour une mise en rotation rapide de la turbine, un débit massique élevé est nécessaire, comme une grande vitesse d'entrée.
A ce niveau de la modélisation, la vitesse de sortie v_2 dépend forcément de ω : si la vitesse de rotation est élevée, une part d'énergie plus importante est prélevée au fluide et la vitesse de sortie diminue. Donc on ne peut pas intégrer cette équation non-explicite pour exprimer $\omega(t)$. Un bilan d'énergie cinétique complémentaire lèvera cette indétermination.

En régime stationnaire $\boldsymbol{\frac{d\omega}{dt} = 0}$, on obtient la relation entre couple résistant et vitesses : $\boxed{\boldsymbol{\Gamma = a\,D_m(v_1 - v_2)}}$

➔ Approche énergétique du fonctionnement de la turbine : bilan d'énergie cinétique

Pour simplifier l'exploitation du théorème de la puissance cinétique, on se place dans le cas d'un régime établi pour le rotor, soit une **vitesse angulaire constante**.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_c}{dt}(S) = P_{ext} + P_{int} \rightarrow \;\; dE_c(S) = E_c(S, t + dt) - E_c(S, t) = (P_{ext} + P_{int})\,dt}}$$

→ Montrer que la variation d'énergie cinétique pour S, entre t et t+dt s'exprime par : $\boldsymbol{dE_c = \frac{1}{2}\,D_m\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right)dt}$

→ Détailler les puissances des actions intérieures et extérieures pour S, on rappelle que l'écoulement est parfait, incompressible et homogène, et stationnaire. La liaison pivot qui assure la rotation de la roue est parfaite.

→ Montrer alors que ce bilan énergétique se traduit par : $\boxed{\boldsymbol{\Gamma\omega = \frac{1}{2}D_m(v_1{}^2 - v_2{}^2)}}$

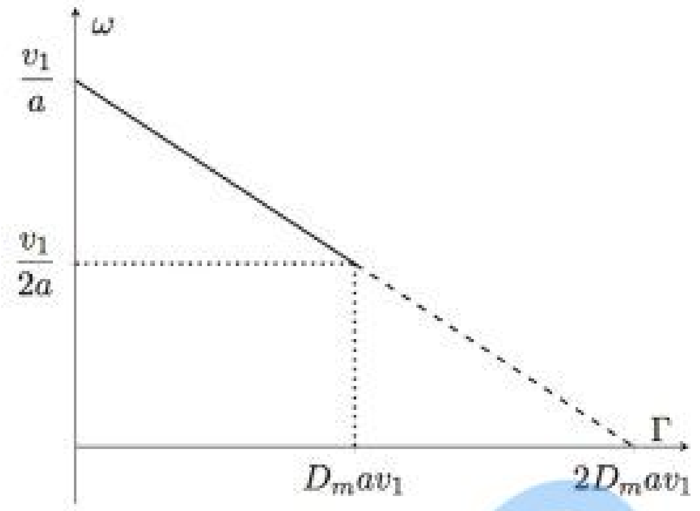
En exploitant les deux bilans de moment cinétique et de quantité de mouvement, on établit donc la relation : $\boxed{\boldsymbol{v_1 + v_2 = 2a\omega}}$

On peut alors **déterminer la vitesse angulaire de la turbine en régime permanent** :

$\boxed{\boldsymbol{\Gamma = 2\, a\, D_m (v_1 - a\,\omega)}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\omega = \frac{v_1}{a}\left(1 - \frac{\Gamma}{2 D_m a v_1}\right)}}$

➔ Vitesse angulaire et couple résistant

En l'absence de couple résistant, $v_1 = v_2 = \omega\, a$ -> le couple moteur de l'eau est nul aussi car la vitesse du jet en sortie est égale à la vitesse en entrée. Elle est exactement égale à la vitesse de la roue (en périphérie) : le jet d'eau et la turbine « s'ignorent ».



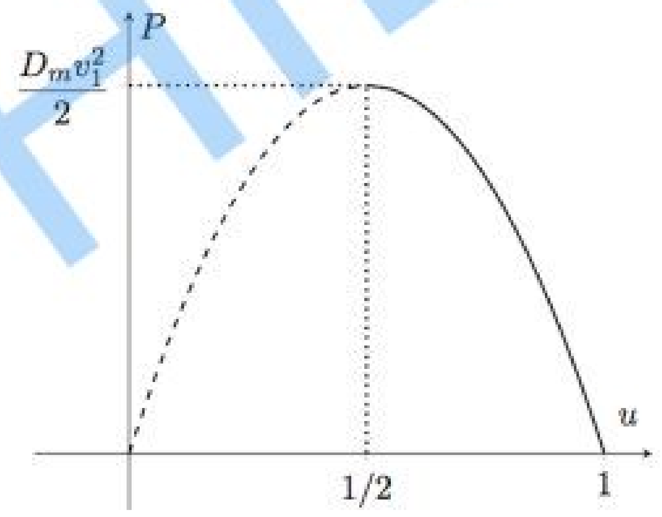
La **vitesse de rotation diminue lorsque la charge augmente** (couple résistant).
Le moment d'inertie du rotor n'influence pas la vitesse de rotation en régime permanent, mais influencera la durée du régime transitoire.

La vitesse en sortie s'annule pour $\boldsymbol{\Gamma_{max} = D_m\, a\, v_1}$ qui représente le **couple de charge maximum** que peut entraîner l'écoulement.

➔ Puissance fournie par la turbine

En régime stationnaire, la turbine fournit une puissance :
$\boldsymbol{P = \Gamma\omega = 2D_m a\omega(v_1 - a\,\omega) = D_m {v_1}^2\, 2u(1-u)}$
avec $u = \frac{\omega a}{v_1}$
On retrouve une **puissance maximale** pour $v_2 = 0$ (u = 1/2) qui vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{P_{max} = \frac{1}{2}\, D_m\, {v_1}^2}}$$



Le jet transfère alors la totalité de son énergie cinétique**, la puissance maximale transmise** est alors **égale à la puissance cinétique du jet incident**.

Pour une centrale hydroélectrique, avec un débit massique typique D_m = 1000 kg.s^{-1}, une vitesse angulaire de 700 tours.min^{-1} pour un rayon de roue de 50 cm et une vitesse d'eau de 100 m.s^{-1}, on obtient un couple fourni de 32 kN.m et une puissance fournie de 2,3 MW.

➔ Evolution de la vitesse angulaire en régime transitoire

→ En exploitant l'équation d'évolution de la vitesse angulaire, exprimer cette évolution temporelle, et la représenter, en précisant l'expression du temps caractéristique du régime transitoire.

Ce qu'il faut retenir !

• Bilan de masse en régime stationnaire

– Régime stationnaire : on parle de fonctionnement en *régime stationnaire,* lorsque toute grandeur intensive est constante dans le temps en chacun des points du système.
– Bilan de masse : l'équation de conservation de la masse prend la forme simple, pour un système ne comptant qu'une entrée et une sortie. Il y a conservation du débit en masse :

$$D_{m_e} = D_{m_s} = D_m.$$

• Bilan d'énergie en régime stationnaire

En raisonnant sur la durée $\Delta t = \frac{1}{D_m}$ au cours de laquelle une unité de masse (1 kg) de fluide traverse le système, on définit :

- w_u le *travail utile massique*, qui n'inclut pas le travail des forces pressantes exercées par les fluides en amont et en aval ;
- q le *transfert thermique massique* reçu à travers la frontière ;
- $\Delta h = h_s - h_e$ la différence entre l'enthalpie massique du fluide en sortie et en entrée ;
- $\Delta e = \left(\frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right)$ la variation d'énergie cinétique et potentielle massiques entre l'entrée et la sortie.

Le premier principe conduit à une équation de bilan énergétique :

$$\Delta h + \Delta e = w_u + q.$$

• Bilan d'entropie en régime stationnaire

La variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie est la somme d'un terme d'échange, qui s'annule dans le cas d'une évolution adiabatique, et d'un terme de création, qui ne s'annule que dans le cas limite d'une transformation réversible :

$$\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{cré}}.$$

• Exemple (conditions et figures définies dans le cours)

Turbine calorifugée : le bilan enthalpique donne pour l'unité de masse de fluide,

$$-w_u = h_e - h_s.$$

• Bilan d'énergie mécanique pour un fluide parfait incompressible

Pour un écoulement incompressible la masse volumique est constante :

$$\mu_e = \mu_s = \mu.$$

Les vitesses sont uniformes sur les sections, le débit volumique s'écrit :

$$D_V = v_e S_e = v_s S_s.$$

On admet qu'il est possible de faire un bilan d'énergie mécanique, sans prendre en compte les aspects thermodynamiques, dans le cas d'un écoulement *stationnaire, parfait* et *incompressible.*

• Relation de Bernoulli

Pour un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible, l'équation de Bernoulli traduit la conservation de la quantité $\frac{P}{\mu} + \frac{1}{2}v^2 + gz$, homogène à une énergie massique exprimée en J. kg^{-1} :

$$\frac{P_s}{\mu} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \frac{P_e}{\mu} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e.$$

• Prise en compte d'un élément actif

En présence d'un élément actif apportant un *travail massique indiqué* w_i à l'écoulement :

$$\frac{P_s}{\mu} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s = \frac{P_e}{\mu} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e + w_i.$$

Multiplier cette équation par le débit en masse $D_m = \mu D_V$ aboutit à une puissance indiquée Ψ_i :

$$D_m\left[\left(\frac{P_s}{\mu} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\frac{P_e}{\mu} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right)\right] = \Psi_i.$$

• Perte de charge régulière

Une perte de charge est dite régulière lorsqu'elle est définie pour un tronçon de conduite parcouru par un fluide incompressible, en régime stationnaire.
Elle s'exprime en pascal par :

$$\Delta P_C = \left(P_e + \frac{1}{2}\mu v_e^2 + \mu g z_e\right) - \left(P_s + \frac{1}{2}\mu v_s^2 + \mu g z_s\right),$$

ou en mètre (différence d'altitude z équivalente) :

$$\Delta z_C = \left(\frac{P_e}{\mu g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e\right) - \left(\frac{P_s}{\mu g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s\right).$$

La perte de charge dépend de la nature du fluide, du matériau de la conduite, de la géométrie de celle-ci et des propriétés de l'écoulement.

• Pertes de charge singulières

Les pertes de charges singulières apparaissent de manière localisée, sur des coudes, des raccords entre canalisations de sections différentes, des bifurcations…

- Une **surface de contrôle** est une surface fermée, choisie fixe dans un référentiel donné. La matière qu'elle contient varie en général d'un instant à un autre. Afin de constituer un système fermé entre les instants t et $t + dt$, il faut lui ajouter :
– à l'instant t, la matière qui va rentrer dans la surface de contrôle pendant dt ;
– à l'instant $t + dt$, la matière qui a quitté l'intérieur de la surface de contrôle pendant dt.

- On appelle **dérivée particulaire** d'une grandeur extensive (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie…) la dérivée temporelle de cette quantité en suivant la matière au cours de son mouvement, afin de bien souligner que l'on s'intéresse à un système fermé. On la note $\frac{D}{Dt}$.

- Une fois un **système fermé** bien défini, on lui applique la loi physique voulue :
– bilan de quantité de mouvement : relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{F}_{\text{ext}} ;$$

– bilan de moment cinétique : théorème du moment cinétique :

$$\frac{D\vec{L}_O}{Dt} = \vec{\mathcal{M}}_O \quad \text{(actions extérieures) ;}$$

– bilan d'énergie cinétique : théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{DE_c}{Dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

où P_{int} est la puissance des actions internes, qui est nulle si l'écoulement est parfait. Sous certaines conditions, ce bilan porte le nom de théorème de Bernoulli (*voir* le chapitre précédent) ;
– bilan d'énergie interne : premier principe de la thermodynamique (*voir* le chapitre précédent) ;
– bilan d'entropie : second principe de la thermodynamique (*voir* le chapitre précédent).