

PROPOSITION 4 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$X_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Démonstration

Lemme: $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, la fonction $P_n: x \mapsto \det(xB - A)$ est polynômiale de degré inférieur à n .

→ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: H_n l'énoncé du lemme.

- H_1 est vraie car $P_1: x \mapsto x b_{11} - a_{11}$, $P_1 \in \mathbb{R}_1[x]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vraie.

Soit $A, B \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$.

$$\det(xB - A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} (x b_{i1} - a_{i1}) \Delta_{i,1}(x)$$

par un développement par rapport à la 1^{re} colonne
où $\Delta_{i,1}(x)$ désigne le déterminant obtenu en rayant la i ème ligne et la 1^{re} colonne de $xB - A$.

On peut appliquer H_n à $\Delta_{i,1}(x)$ pour tout $i \in [1, n+1]$
car il existe $A_i, B_i \in M_n(\mathbb{K})$, $\Delta_{i,1}(x) = \det(xB_i - A_i)$
donc $\Delta_{i,1} \in \mathbb{R}_n[x]$.

donc $x \det(xB - A)$ est polynômiale de degré inférieur à $n+1$. H_{n+1} vraie.

Par Th. de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n vraie.

→ dém Prop: On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

H_n : " $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, X_A unitaire de degré n et son coefficient de degré $n-1$ vaut $-\text{tr}(A)$ ".

- H_1 vraie: clair. $X_A(x) = x - A$.
- Soit $n \geq 2$. On suppose H_{n-1} vraie. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$X_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne.

$$X_A(x) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j+1} a_{nj} \Delta_{n,j}(x) + (x - a_{nn}) \Delta_{n,n}(x)$$

où $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\Delta_{n,j}(x)$ est le déterminant obtenu à partir de $X_A(x)$ en rayant la n ème ligne et la j ème colonne.

En notant A' la matrice extraite de A en rayant sa n ème ligne et sa n ème colonne, $\Delta_{n,n}(x) = \det(x I_{n-1} - A')$

H_{n-1} étant vraie, comme $A' \in M_{n-1}(\mathbb{K})$,

$$\Delta_{n,n}(x) = x^{n-1} - \text{tr}(A') x^{n-2} + R_n(x) \text{ où } \deg R_n \leq n-3$$

$$\begin{aligned} \text{donc } (x - a_{nn}) \Delta_{n,n}(x) &= x^n - a_{nn} x^{n-1} - \text{tr}(A') x^{n-1} + S_n(x) \\ &= x^n - \text{tr}(A) x^{n-1} + S_n(x) \text{ où } \deg S_n \leq n-2. \end{aligned}$$

$$(\text{car } \text{tr}(A) = \text{tr}(A') + a_{nn}).$$

Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On va montrer que $\Delta_{n,j} \in \mathbb{K}_{n-2}[x]$.

La j ème ligne de $\Delta_{n,j}(x)$ ne contient pas de terme en x .

$$\begin{aligned} \Delta_{n,j}(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,j-1} & -a_{1,j+1} & \dots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ -a_{j1} & -a_{j2} & \dots & x - a_{j,j-1} & -a_{j,j+1} & \dots & -a_{j,n-1} & -a_{jn} \\ \vdots & & & -a_{i,j-1} & -a_{i,j+1} & & & \\ \vdots & & & & x - a_{i,i-1} & & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & -a_{n-1,j-1} & -a_{n-1,j+1} & \dots & x - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (-1)^{i+j+1} a_{ji} \underbrace{\Delta_{j,i}^*(x)}_{\substack{\text{déterminant d'ordre } n-2 \\ \text{extraite de } \Delta_{n,j}(x) \text{ en rayant sa} \\ j\text{ème ligne et sa } i\text{ème colonne}}} \end{aligned}$$

$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{j\}$, il existe $A_i', B_i' \in M_{n-2}(\mathbb{K})$, $\Delta_{j,i}^*(x) = \det(x B_i' - A_i')$

donc d'après le lemme, $\Delta_{j,i}^* \in \mathbb{K}_{n-2}[x]$ et $\Delta_{n,j} \in \mathbb{K}_{n-2}[x]$

Donc X_A est bien univarié de degré n

et son coefficient de degré $n-1$ vaut $-\text{tr}(A)$.

H_n est vraie.

Par Th. de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$X_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

donne le coefficient constant.