ENSEMBLES DENOMBRABLES

Rappels : Un ensemble E non vide est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'entier n est unique et est appelé cardinal de E et noté $\text{card}(E)$. Par convention l'ensemble vide est fini et de cardinal 0.
Deux ensembles finis non vides sont en bijection si et seulement si ils ont même cardinal.
Si un ensemble F est en bijection avec un ensemble fini E, F est fini et E et F ont même cardinal.
Définition 1 :Un ensemble E est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$ (on dit qu'ils sont équipotents). Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable.
Dans ce cas on peut écrire E sous la forme : $E = \{x_n ; n \in I\}$, les x_n étant deux à deux distincts (avec I fini de la forme $[\![1, n]\!]$ si E est fini,et $I = \mathbb{N}$ si E est dénombrable). En effet si ϕ désigne une bijection de $[\![1, n]\!]$ (resp. $\mathbb{N}$) sur E, $E = \{\phi(n) ; n \in I\}$.

Proposition 0 :Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec un ensemble dénombrable.

Exemples : 1. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables. Pourquoi ?

2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable : montrer que $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, p \mapsto \begin{cases} 2p \text{ si } p \geq 0 \\ -2p - 1 \text{ si } p < 0 \end{cases}$ est une bijection.

3. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : montrer que $\phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*, (n, p) \mapsto 2^n(2p + 1)$ est une bijection.

4. Montrer que l'ensemble des nombres pairs est dénombrable.

Proposition 1 : Si E et F sont dénombrables, $E \times F$ est dénombrable.
Par récurrence, si E est dénombrable, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, E^p est dénombrable.
Démonstration : Construire une bijection entre $E \times F$ et $\mathbb{N}^2$.

Proposition 2 : **1. Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.**
2. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration : Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si elle est finie, c'est clair. Supposons qu'elle est infinie et montrons qu'elle est dénombrable.
On pose $\phi : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n$ où $a_0 = \min(A)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \min(A \setminus \{a_0, ..., a_{n-1}\}$.
a. Vérifier que ϕ est bien définie, et que pour tout $n \geq 2$, $a_n > a_{n-1}$ en déduire que ϕ est strictement croissante donc injective.
b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. En déduire que $\phi(n) \to_{n \to +\infty} +\infty$.
c. Déduire par l'absurde que ϕ est surjective.

Exemple : L'ensemble des nombres premiers est infini donc dénombrable.

Proposition 3 : Une réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrable est dénombrable

Remarques : Les résultats suivants sont utiles :
Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si et seulement s'il existe une injection de E sur $\mathbb{N}$.
Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est dénombrable. (construire une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$)

Exemples d'ensembles non dénombrables : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables :

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
On supposera l'existence d'une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et on obtiendra une contradiction à l'aide de l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} / n \notin \varphi(n)\}$.
2. Soit $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$. En construisant une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur E, déduire de 1. que E n'est pas dénombrable.
3. Soit $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, (u_n)_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^n}$. Justifier que Φ est bien définie. Elle est injective (par unicité du développement décimal propre de tout réel). En déduire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec une partie infinie de $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ ne peut donc pas être dénombrable.