

ENSEMBLES DENOMBRABLES : CORRIGES

Proposition 2 : 1. Toute partie de \mathbb{N} est au plus dénombrable. Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable. Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

2. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Démonstration : Soit A une partie de \mathbb{N} . Si elle est finie, c'est clair. Supposons qu'elle est infinie et montrons qu'elle est dénombrable.

On pose $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n$ où $a_0 = \min(A)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \min(A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\})$.

L'application ϕ est bien définie car A est infinie donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} donc admet un minimum. Soit $n \geq 2$, la partie $A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-2}\}$, qui a pour minimum a_{n-1} , contient a_n donc $a_{n-1} \leq a_n$ et comme $a_n \in A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, $\phi(n-1) = a_{n-1} < a_n = \phi(n)$ donc ϕ est strictement croissante donc injective (si $n \neq p$, $\phi(n) \neq \phi(p)$).

b. Par récurrence on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. En effet, $\phi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\phi(0) \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\phi(n) \geq n$. Alors $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$, comme $\phi(n+1) \in \mathbb{N}$ cela donne bien $\phi(n+1) > n+1$. Par théorème de comparaison par minoration, on en déduit que $\phi(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

c. Supposons par l'absurde que ϕ n'est pas surjective : il existe $a \in A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \neq a$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ donc par définition de $\phi(n)$, $a \geq \phi(n)$, ce qui contredit $\phi(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Proposition 3 : Une réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrable est dénombrable

Démonstration :

1. Soient E et F deux ensembles dénombrables en bijection avec \mathbb{N} via $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow E$ et $\phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow F$. On pose :

$$\Phi : \mathbb{N} \rightarrow E \cup F, n \mapsto \begin{cases} \phi_1\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \phi_2\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{qui définit une surjection, ce qui montre que } E \cup F \text{ est}$$

dénombrable d'après la remarque ci-dessous. En effet si $x \in E \cup F$:

- si $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \phi_1(n) = \Phi(2n)$ puisque ϕ_1 est une bijection.
- si $x \in F$, il existe de même $p \in \mathbb{N}$ tel que $x = \phi_2(p) = \Phi(2p+1)$.

2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\phi_k : \mathbb{N} \rightarrow A_k \text{ une bijection et on pose : } \Phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{qui définit de même une surjection.}$$

$$(k, l) \mapsto \phi_k(l)$$

En effet, si $x \in A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k$ et $l \in \mathbb{N}$ tel que $x = \phi_k(l) = \Phi(k, l)$ puisque ϕ_k est une bijection, ce qui permet d'obtenir une surjection de \mathbb{N} sur A donc A est dénombrable.

Remarques : Les résultats suivants sont utiles : Soit E un ensemble non vide.

L'ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si et seulement s'il existe une injection de E sur \mathbb{N} .

L'ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si et seulement s'il existe une surjection de \mathbb{N} sur E .

Démonstrations :

\Rightarrow Si E est dénombrable il existe une bijection donc une injection et une surjection de E sur \mathbb{N} .

Si E est fini, il existe une bijection ϕ de E sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc l'application $E \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \phi(n)$ est une

injection et l'application : $\mathbb{N} \rightarrow E, p \mapsto \begin{cases} \phi^{-1}(p) & \text{si } p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \phi^{-1}(1) & \text{sinon} \end{cases}$ définit une surjection.

\Leftarrow 1. Soit $\phi : E \rightarrow \mathbb{N}$ une injection. Si E est fini, c'est fini, si E est infini, alors l'application

$\Phi : E \rightarrow \phi(E)$ définit une bijection (surjective par construction). E est donc en bijection avec $\phi(E)$ une partie infinie (car E l'est) de \mathbb{N} qui est dénombrable donc E est dénombrable.

2. Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow E$ une surjection. Si E est fini, c'est fini, supposons E infini. On pose

$\Phi : E \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \min(\phi^{-1}(\{x\}))$ (bien définie car pour tout $x \in E$, $\phi^{-1}(\{x\})$ est une partie non vide de \mathbb{N}

puisque ϕ est surjective). L'application Φ est injective (car si $a, b \in E$ sont tels que $a \neq b$,

$\phi^{-1}(\{a\}) \cap \phi^{-1}(\{b\}) = \emptyset$) donc d'après 1., E est dénombrable.

Exemple : \mathbb{Q} est dénombrable car l'application :

$$\phi : \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) \mapsto \frac{p}{q} \end{array}$$

est surjective. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable comme produit d'ensembles dénombrables, il existe une bijection ψ de \mathbb{N} sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\phi \circ \psi$ est donc une surjection de \mathbb{N} sur \mathbb{Q} .

Exemples d'ensembles non dénombrables : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, \mathbb{R} ne sont pas dénombrables :

1. Montrons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de \mathbb{N} n'est pas dénombrable.

Supposons par l'absurde l'existence d'une bijection φ de \mathbb{N} sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} / n \notin \varphi(n)\}$ est une partie de \mathbb{N} donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A = \varphi(p)$. Or si $p \in A$, $p \notin \varphi(p) = A$, ce qui est absurde, et si $p \notin A = \varphi(p)$, $p \in A$ ce qui est absurde.

2. Soit $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$. On pose

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow E, A \mapsto \mathbb{1}_A : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ définit une bijection de bijection réciproque}$$

$\Phi^{-1} : E \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), (a_n)_n \mapsto \{n \in \mathbb{N} / a_n = 1\}$. Si E était dénombrable il serait en bijection avec \mathbb{N} donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aussi ce qui est absurde d'après 1.

3. Soit $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (u_n)_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^n}$. Φ est bien définie car $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_n}{10^n} \right| \leq \frac{1}{10^n}$ terme général d'une

série convergente donc la série de terme général $\frac{u_n}{10^n}$ converge par critère de domination pour les séries à termes positifs. Elle est injective (par unicité du développement décimal propre de tout réel).

L'application : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \Phi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = A$ est donc une bijection. Si \mathbb{R} était dénombrable, A serait dénombrable comme partie infinie d'un ensemble dénombrable donc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aussi ce qui est absurde.