

Notations

Dans tout l'énoncé, on adopte les notations suivantes :

- Si E et F sont deux ensembles non vides, alors $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Si $k \geq 1$ est un entier, on note E^k l'ensemble des k -uplets (x_1, \dots, x_k) avec $x_i \in E$ pour $1 \leq i \leq k$.
- Pour tout entier $d \geq 1$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^d défini par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \forall y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

On note $\| \cdot \|$ la norme associée définie sur \mathbb{R}^d par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2},$$

On note (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d .

- Si E est un ensemble non vide et g une application de E dans \mathbb{R} , on note $\inf_{x \in E} g(x)$ la borne inférieure de l'ensemble non vide $g(E)$ défini par

$$g(E) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = g(x)\}.$$

On rappelle que cette borne inférieure est bien définie si g est minorée sur E , c'est-à-dire s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall x \in E, g(x) \geq m.$$

De même, on note $\sup_{x \in E} g(x)$ la borne supérieure de $g(E)$. Cette borne supérieure est bien définie s'il existe un nombre réel M tel que

$$\forall x \in E, g(x) \leq M.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de E dans \mathbb{R} , on note $\min(f_1, f_2)$ la fonction de E dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in E, \min(f_1, f_2)(x) = \min(f_1(x), f_2(x)).$$

- Si $d \geq 1$ est un entier, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $K \geq 0$ une constante réelle, on dit que f est K -Lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|.$$

On dit que f est Lipschitzienne s'il existe une constante réelle $K \geq 0$ telle que f est K -Lipschitzienne.

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions *bornées* de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Dans toute la suite, d désignera un entier naturel non nul.

Partie I : approximation par des fonctions Lipschitziennes

Dans toute cette partie, ε et α désignent deux nombres réels avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha \geq 1$. Si $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction minorée, on définit, sous réserve d'existence, la fonction $T_\varepsilon h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (T_\varepsilon h)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (h(y) + \frac{1}{\varepsilon} \|y - x\|^\alpha).$$

1. Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction minorée. Montrer que la fonction $T_\varepsilon h$ est bien définie sur \mathbb{R}^d et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (T_\varepsilon h)(x) \leq h(x).$$

2. Soient h_1 et h_2 deux fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} minorées. On pose $H = \min(h_1, h_2)$. Montrer que $T_\varepsilon H$ est bien définie sur \mathbb{R}^d et que $T_\varepsilon H = \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.
Indication : pour prouver cette dernière identité, on peut d'abord montrer que $T_\varepsilon H \leq \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.
3. On suppose dans cette question uniquement que $\alpha = 2$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \|x\|^2.$$

Calculer $(T_\varepsilon g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Indication : pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on peut décomposer tout vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $y = \lambda x + y_\perp$ avec λ un nombre réel et y_\perp un vecteur orthogonal à x .

4. On suppose ici uniquement que $\alpha = 1$. Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction minorée.
 - (a) Montrer que $T_\varepsilon h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$ -Lipschitzienne.
 - (b) Montrer que $T_\varepsilon h = h$ si et seulement si h est $\frac{1}{\varepsilon}$ -Lipschitzienne
 - (c) On se place dans le cas où $h(x) = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (T_\varepsilon h)(x) = \min(1, \frac{1}{\varepsilon}) \|x\|.$$

- (d) Soit $\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\ell(x) = \min(1, \|x\|)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.
Exprimer $(T_\varepsilon \ell)(x)$ en fonction de ε et x pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On revient désormais au cas général où $\alpha \geq 1$. Dans toute la suite de cette partie, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction fixée.

5. Montrer que $T_\varepsilon f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $|T_\varepsilon f|_\infty \leq |f|_\infty$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid f(y) + \frac{1}{\varepsilon} \|y - x\|^\alpha \leq f(x)\}.$$

Montrer que $A(x) \neq \emptyset$, que

$$\forall y \in A(x), \quad \|y - x\| \leq (2\varepsilon |f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

et que

$$(T_\varepsilon f)(x) = \inf_{y \in A(x)} (f(y) + \frac{1}{\varepsilon} \|y - x\|^\alpha).$$

7. On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $y_x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$(T_\varepsilon f)(x) = f(y_x) + \frac{1}{\varepsilon} \|y_x - x\|^\alpha.$$

8. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon} \|y - x\|^\alpha.$$

9. On pose ici et dans toute la suite, sous réserve d'existence,

$$\forall r \in [0, +\infty[, \quad \omega_f(r) = \sup_{(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)} |f(x) - f(y)|,$$

où

$$\mathcal{B}_0(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leq r\}.$$

Démontrer les deux assertions suivantes

- (a) Pour tout réel $r \geq 0$, $\omega_f(r)$ est bien défini et

$$\omega_f(r) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon} r^\alpha.$$

- (b) La fonction $r \in [0, +\infty[\mapsto \omega_f(r)$ est croissante.

10. Montrer que

$$|T_\varepsilon f - f|_\infty \leq \omega_f(r_\varepsilon) \quad \text{où } r_\varepsilon = (2\varepsilon |f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

11. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La suite de fonctions $(T_{1/n} f)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f .
 (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_f(t) = 0$.

Partie II : fonctions concaves

On dit que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est concave si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On dit que f est convexe si $-f$ est concave.

Dans la suite, f sera une fonction concave de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

12. Soit f_0 une autre fonction concave de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Montrer que $f + f_0$ et $\min(f, f_0)$ sont concaves.
 13. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifient $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

14. Soient $x \neq z$ deux points distincts de \mathbb{R}^n et $\lambda \in]0, 1[$. On pose $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
Montrer que

$$\frac{f(z) - f(y)}{\lambda} \leq f(z) - f(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{1 - \lambda}.$$

15. Soit $M > 0$ un réel fixé. On note X_1, \dots, X_{2^d} les 2^d éléments de $\{-M, M\}^d$ (énumérés dans un ordre arbitraire).

- (a) Montrer que pour tout $x \in [-M, M]^d$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{2^d} \in [0, 1]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_i = x.$$

Indication : on peut procéder par récurrence.

- (b) Montrer qu'il existe une constante réelle $D \leq 0$ telle que :

$$\forall x \in [-M, M]^d, f(x) - f(0) \geq D.$$

- (c) En déduire que

$$\forall x \in [-M, M]^d, |f(x) - f(0)| \leq |D|.$$

Indication : on peut observer que $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)$ pour tout $x \in [-M, M]^d$

- (d) En déduire que pour tous $x, y \in [-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]^d$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4|D|}{M} \|x - y\|.$$

Indication : on peut considérer un point $z = y + t(y - x)$ avec $t > 0$ un nombre réel convenablement choisi.

- (e) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^d .

16. Soit $C \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un ensemble convexe fermé non vide et $Y \in \mathbb{R}^{d+1}$.

- (a) Montrer qu'il existe $Y_0 \in C$ tel que

$$\forall X \in C, \|Y - Y_0\| \leq \|Y - X\|.$$

- (b) Montrer que

$$\forall X \in C, \langle Y - Y_0 | X - Y_0 \rangle \leq 0.$$

- (c) En déduire que Y_0 est unique.

17. On note $E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$. On fixe dans la suite de cette question $x_* \in \mathbb{R}^d$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique $X_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in E_f$ tel que

$$\forall X \in E_f, \|(x_*, f(x_*) + \varepsilon) - X_\varepsilon\| \leq \|(x_*, f(x_*) + \varepsilon) - X\|.$$

- (b) Montrer que $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$.

- (c) On pose désormais $a(\varepsilon) = f(x_*) - f(x_\varepsilon) + \varepsilon$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \langle x - x_* | x_* - x_\varepsilon \rangle + \|x_* - x_\varepsilon\|^2 + a(\varepsilon)(f(x) - f(x_\varepsilon)) \leq 0.$$

(d) En déduire les deux inégalités

$$0 < a(\varepsilon) \leq \varepsilon, \\ \|x_* - x_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(e) On suppose dans cette question que $\varepsilon \in]0, 1]$. Montrer qu'il existe une constante K_0 dépendant uniquement de f et de x_* , et indépendante de ε , telle que

$$\frac{1}{a(\varepsilon)} \|x_* - x_\varepsilon\| \leq K_0.$$

18. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \geq 0, |u_n| \leq K_0$.

On définit les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante :

— $a_0 = -K_0$ et $b_0 = K_0$

— pour tout entier $n \geq 0$:

- si l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, \frac{a_n + b_n}{2}]\}$ est infini alors

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

- sinon

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

(a) Montrer que ces deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ est infini.

(c) En déduire qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge.

19. Montrer l'existence d'un vecteur $p_* \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) - f(x_*) \leq \langle p_* \mid x - x_* \rangle.$$

Indication : on peut considérer les éléments de \mathbb{R}^d

$$p_n = \frac{1}{a(\frac{1}{n})} (x_{\frac{1}{n}} - x_*), \text{ pour } n \geq 1.$$

20. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont à la fois convexes et concaves.