Fonctions vectorielles.

Le but du chapitre est de généraliser la notion de dérivée, de tangente, connues pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ aux fonctions vectorielles à valeurs dans un espace vectoriel.
Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$, l'étude d'une fonction $f : I \to E$ se ramène à l'étude de la fonction : $I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (f_1(t), ..., f_n(t))$ où on a noté pour tout $t \in I\ f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)$.
On se restreint donc dans la suite à des fonctions $f : I \to \mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Le cas $n = 1$ a été vu en première année, on suppose donc a priori $n \geq 2$.
On appellera applications coordonnées (ou composantes) de f les applications $f_1, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$ définies par : $\forall t \in I,\ f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$.

1. Dérivabilité en un point. Fonction dérivée

Soit $a \in I$.
Définition $f : I \to \mathbb{R}^n$ est **dérivable en a** ssi son taux d'accroissement en a $\tau_a(f) : I \setminus \{a\} \to E,\ t \mapsto \frac{1}{t-a}.(f(t) - f(a))$ admet une limite $\ell \in E$ en a.
Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée de f en a (ou vecteur dérivé de f en a) et notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dt}(a)$.

Proposition 1 : développement limité à l'ordre 1 en a Soit $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a cad ssi il existe un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a).\ell + (t-a).\epsilon(t) \text{ et } \lim_{t \to a} \epsilon(t) = 0$$

On note alors $f'(a) = \ell$.
Remarque : Interprétation cinématique : lorsque $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, si f représente le mouvement d'un point en fonction du temps, s'il est non nul, le vecteur $f'(t_0)$ représente la vitesse instantanée du point à l'instant t_0.

Proposition 2 : Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Remarque : La réciproque de ce résultat est fausse ! ! ! Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto |t|.(1, 1, 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car :

$$\forall t > 0, \frac{1}{t}.(f(t) - f(0)) = (1, 1, 1) \text{ et } \forall t < 0, \frac{1}{t}.(f(t) - f(0)) = -(1, 1, 1)$$

donc le taux d'accroissement de f en 0 n'admet pas de limite en 0.

Proposition 3 : utilisation des applications coordonnées de f
f est dérivable en a si et seulement si ses applications coordonnées sont toutes dérivables en a.
Dans ce cas, si on note pour tout $t \in I,\ f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$, on a :

$$f'(a) = (f_1'(a), ..., f_n'(a))$$

.

Définition2. Fonction dérivée :
f est **dérivable sur I** si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas on note f' ou $\dfrac{df}{dt}$ l'application : $I \to E, a \mapsto f'(a)$, elle est appelée **dérivée de f**.

Remarque : f est dérivable sur I si et seulement si ses applications coordonnées sont toutes dérivables sur I. Dans ce cas, les applications coordonnées de f' sont les dérivées des applications coordonnées de f.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), \sin(t), e^t)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ses applications coordonnées (sin, cos et exp) le sont et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), e^t)$.

Proposition : caractérisation des applications constantes :
Une application f est constante sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable et sa dérivée est nulle sur I.

2. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Les propriétés algébriques sont énoncées pour la dérivabilité en un point a de I et s'étendent donc pour la dérivabilité sur un intervalle I.

Proposition 1. : Combinaison linéaire : Une combinaison linéaire d'applications dérivables en a est dérivable en a.

Proposition 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable en a.
1. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors $L \circ f$ est dérivable en a et

$$(L \circ f)'(a) = L \circ f'(a)$$

2. Soient $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $g : I \to \mathbb{R}^p$ dérivable en a. Alors $B(f, g)$ est dérivable en a et :

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

3. Soit $\phi : J \to \mathbb{R}$ (J étant un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$). Si ϕ est dérivable en $b \in J$ et si f est dérivable en $a = \phi(b) \in I$, alors $f \circ \phi$ est dérivable en b et :

$$(f \circ \phi)'(b) = \phi'(b).f'(\phi(b))$$

Remarque : 1. En particulier (du 2.) si $\phi : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle dérivable, $\phi.f : t \mapsto \phi(t).f(t)$ est dérivable et pour tout $t \in I$, $(\phi.f)'(t) = \phi'(t).f(t) + \phi(t).f'(t)$.
Exemple : coordonnées polaires : soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Si r et θ sont deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, la fonction $f : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto r(t).u(\theta(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I,\ f'(t) = r'(t).u(\theta(t)) + r(t)\theta'(t).u'(\theta(t))$$

2. Le 2. se généralise au cas des fonctions multilinéaires. Par exemple, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base B, et si $f_1, ..., f_n : I \to E$ sont n fonctions vectorielles dérivables, alors l'application $det_B(f_1, ..., f_n) : t \mapsto det_B(f_1(t), ..., f_n(t))$ est dérivable et pour tout $t \in I$:

$$(det_B(f_1, ..., f_n))'(t) = det_B(f_1'(t), f_2(t), ..., f_n(t)) + det_B(f_1(t), f_2'(t), ..., f_n(t)) + ... + det_B(f_1(t), ..., f_{n-1}(t), f_n'(t))$$

Exemples importants :
1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire $(./.)$. Soient f et $g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables sur I. Alors $(f/g) : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto (f(t)/g(t))$ est dérivable sur I par bilinéarité du produit scalaire et :

$$\forall t \in I, (f/g)^{'}(t) = (f^{'}(t)/g(t)) + (f(t)/g^{'}(t))$$

En particulier si f ne s'annule pas, l'application norme associée $||f|| : I \to \mathbb{R}, t \mapsto ||f(t)|| = \sqrt{(f(t)/f(t))}$ est dérivable et pour tout $t \in I$: $(||f||^2)'(t) = 2(f(t)/f^{'}(t))$ par symétrie du produit scalaire, donc :

$$(||f||)^{'}(t) = \frac{(f^{'}(t)/f(t))}{||f(t)||}$$

.
2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique B et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ dérivable. L'application det(f) :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto Det_B(f_1(t), f_2(t))$ est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(\mathrm{f})^{'}(t) = det_B(f_1^{'}(t), f_2(t)) + det_B(f_1(t), f_2^{'}(t))$$

3. Fonctions de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$)

Définition1. : Une fonction $f : I \to E$ est :
- **de classe C^0** ssi elle est continue sur I.
- **de classe C^1** ssi elle est dérivable sur I et sa dérivée $f^{'}$ est continue sur I.
- **de classe C^k** avec $k \in \mathbb{N}^*$ ssi elle dérivable sur I et sa dérivée $f^{'}$ est de classe C^{k-1} sur I.
- **de classe C^∞** ssi elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On notera $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque : 1. pour $k \in \mathbb{N}^*$, si $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, sa dérivée $k$ième est définie par récurrence par :

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall i \in [\![1, k]\!], f^{(i)} = (f^{'})^{(i-1)} = (f^{(i-1)})^{'}$$

2. Lorsque $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, si f représente le mouvement d'un point en fonction du temps, le vecteur $f^{''}(t_0)$ représente le vecteur accélération du point à l'instant t_0.

Proposition 1. : Opérations algébriques
1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. (toute combinaison linéaire de fonctions de classe C^k est de classe C^k).
2. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$. Alors $L \circ f$ est de classe C^k.
3. Soient $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire et $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $g \in C^k(I, \mathbb{R}^p)$. Alors $B(f, g) \in C^k(I, \mathbb{R}^q)$ et pour $n \leq k$:

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} B(f^{(p)}, g^{(n-p)})$$

4. Soit $\phi \in C^k(J, \mathbb{R})$ (J étant un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$) et $f \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, alors $f \circ \phi$ est de classe C^k sur J.

Proposition 2. : Théorème de la limite de la dérivée
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ continue sur I et $a \in I$ tel que f soit de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$. Si $f^{'}$ admet une limite ℓ en a alors f est de classe C^1 sur I et $f^{'}(a) = \ell$.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ continue sur I, $k \in \mathbb{N}^*$, et $a \in I$ tel que f soit de classe C^k sur $I \setminus \{a\}$. Si pour tout $r \leq k$, $f^{(r)}$ admet une limite ℓ en a alors f est de classe C^k sur I.