

TD 14 : CORRIGES

Exercice 7 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose $f: (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$, le sinus cardinal étant prolongé par continuité par 1 en zéro.

1. La fonction $f(x, \cdot)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0. Pour $x > 0$, $|f(x, t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et pour $x = 0$, l'intégrale est semi-convergente (classique à l'aide d'une intégration par partie).
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin t e^{-xt}.$$

La fonction partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $a > 0$. On a l'hypothèse de domination locale $\forall t \in [a, +\infty[, \forall x \in]0, +\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq e^{-at}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc, avec le théorème de dérivation sous $\int$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit l'existence d'une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = -\arctan x + C$. Par inégalité de convexité, $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Alors $C = \frac{\pi}{2}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

3. On écrit que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x, t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x) \quad \text{où} \quad u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} e^{-xt} dt.$$

Pour x fixé, $u_n(x) \geq 0$ et $|u_n(t)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} dt$: le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini par convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dx$. Enfin, le changement de variable $u = t - \pi$ montre que

$$u_{n+1}(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u + \pi} e^{-(u+\pi)x} du \leq u_n(x).$$

La suite $(u_n(x))$ satisfait les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc le reste de la série de fonctions de somme F vérifie

$$|R_{n-1}(x)| \leq |u_n(x)| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} dt = \frac{1}{n\pi} \frac{e^{-n\pi x}(1 - e^{-\pi x})}{x} \leq \frac{1}{n},$$

la dernière inégalité venant de ce que $\forall y \in \mathbb{R}, e^y \geq 1 + y$. Il en résulte que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$ et donc F est continue sur $[0, +\infty[$. En reprenant la limite en 0, on obtient

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$