VALIDATION DU COURS DE MATHEMATIQUES

REVISIONS DE PCSI INDISPENSABLES (non exhaustif !)

1. Enoncer les formules de trigonométrie (linéarisation, addition, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$).
2. Donner l'expression des racines nièmes de l'unité, puis d'un complexe z_0 non nul. Redémontrer le résultat.
3. Enoncer les développements limités usuels.
4. Enoncer les dérivées/primitives des fonctions usuelles.
5. Equivalents au voisinage de 0 des fonctions usuelles.
6. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_n$ ne s'annulant pas. Donner la définition de : (1.5pt)
   a. $u_n = O(v_n)$ b. $u_n = o(v_n)$ c. $u_n \sim v_n$
7. Définitions de la borne supérieure/inférieure, du maximum/minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$? Et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$?
9. Soient $q \in \mathbb{C}$, $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$?
10. Chapitres d'analyse sur les suites et fonctions à revoir (théorèmes à connaitre : TVI, théorème de Rolle, des accroissements finis, de la limite monotone, théorème des bornes atteintes).
11. Chapitre sur les polynômes.
12. Théorème donnant le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux.
13. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er et du second ordre à coefficients constants.

SUITES ET SERIES NUMERIQUES

1. **Maitriser les différentes notations et ne pas les confondre :** u_n, $(u_n)_n$, $\sum u_n$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$
   La somme ou le reste d'une série ne sont définis que si la série converge
2. Donner la définition d'une suite convergente. De même pour une série convergente.
3. Donner la nature d'une série géométrique et sa somme en cas de convergence.
4. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
5. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer qu'alors $u_n \to_{n\to+\infty} 0$. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.
6. Enoncer le théorème de la limite monotone pour les suites numériques.
7. Enoncer le théorème d'encadrement et le théorème de comparaison (minoration/majoration) pour les suites tendant vers l'infini. (démonstrations)
8. Donner la définition de deux suites adjacentes. Enoncer le théorème des suites adjacentes.
9. Montrer qu'une série à termes positifs converge ssi sa somme partielle est une suite majorée.
10. Enoncer et démontrer le lien suite-série.
11. Savoir l'utiliser (constante d'Euler) : démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
12. Enoncer le théorème de comparaison (critère de domination/majoration/équivalence) pour les séries à termes positifs.

13. Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale.
14. Donner la nature des séries de Riemann et redémontrer le résultat.
15. A l'aide d'une comparaison série intégrale, savoir trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ si $\alpha < 1$ et de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ si $\alpha > 1$.
16. A l'aide d'une comparaison série intégrale, étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ et un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.
17. Enoncer la définition d'une série alternée, puis le théorème des séries alternées.
18. Enoncer le théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries numériques.
19. Enoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs. La démontrer.
20. Enoncer la formule de Stirling.
21. Déterminer la nature des séries de terme général :
    1. $\frac{(\ln(n))^8}{n^2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ 3. $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 4. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
22. Séries de Bertrand : savoir montrer que la série $\sum \frac{(\ln(n)^\beta}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
23. (*) Savoir montrer qu'une série converge avec une transformation d 'Abel, exemple : $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

<u>SUITES ET SERIES DE FONCTIONS</u>

1. Donner les définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2. Donner les définitions de la convergence simple, de la convergence uniforme et de la convergence normale d'une série de fonctions. Etablir le lien entre les différents types de convergence.
3. Enoncer le théorème donnant la continuité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp.) d'une série de fonctions.
4. Enoncer le théorème d'interversion limite-intégrale <u>sur un segment</u> concernant les suites de fonctions. De même pour les séries de fonctions.
5. Enoncer le théorème donnant le caractère C^1 de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp.) d'une série de fonctions.
6. Enoncer le théorème donnant le caractère C^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp.) d'une série de fonctions.
7. Enoncer le théorème de convergence dominée.
8. Enoncer le théorème de la double limite.
9. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme (sur un intervalle).
10. Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ la fonction ζ. Montrer que ζ définit sur $]1, +\infty[$ une fonction continue. Montrer qu'elle est de classe C^1 et donner son sens de variations. *Montrer qu'elle est de classe C^∞.* En utilisant la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ et une comparaison série-intégrale montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1 puis sa limite en 1. Montrer ensuite que $\zeta(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
11. (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ puis montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{nx}{n^4x^4+1} \end{cases}$ Etudier la convergence simple de $(g_n)_n$ puis montrer que la convergence n'est pas uniforme.

(c) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2+t^n}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on explicitera et justifier que la convergence n'est pas uniforme puis étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$.

12. (*) Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\in_0^n \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \cos(t)dt$ en appliquant le théorème de convergence dominée à $(f_n)_n$ avec $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t)\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$

13. Soit la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme définit sur $\mathbb{R}^+$ une fonction continue. (2pts)

14. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$: $u_n(x) = \ln(1 + \dfrac{x}{n}) - \dfrac{x}{n}$.
    (a) Montrer que sa somme S définit sur $[0,1]$ une fonction dérivable.(2pts)
    (b) Calculer $S'(1)$.(1pt)

15. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$. (CCINP MP 2018)

    (a) Démontrer que :
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$
    (b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$
    Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on
$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

<u>ESPACES VECTORIELS NORMES ET TOPOLOGIE</u>

E et F désignent deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E, $f : A \to F$ où $A \subset E$.

1. Donner la définition d'une norme sur un espace vectoriel E.
2. Montrer que les applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies en cours définissent des normes sur $\mathbb{K}^n$.
3. Donner la définition de $||x||_2$ si $x \in \mathbb{K}^n$. Montrer que l'application $||.||_2$ ainsi définie définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ en utilisant le produit scalaire associé.
4. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (*démonstration ?*) Cas d'égalité ?
5. Donner la définition d'une boule ouverte/ fermée, d'une sphère d'un espace vectoriel E.
6. Définition et propriétés de la distance associée à une norme.
7. Définition d'un ouvert.
8. Donner trois manières de caractériser le fait qu'une partie A de E est fermée.
9. Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. *Démonstrations ?*
10. Définitions d'un point intérieur, adhérent, de l'adhérence d'une partie A.
11. Définition d'une partie convexe de E.
12. Définition d'une partie dense.
13. Donner la définition de : u_n tend vers ℓ (où $\ell \in E$) puis de : $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a (si $\ell \in F$ et $a \in \bar{A}$).

14. Soit $a \in A$. Donner la définition de : f est continue en a.
15. Enoncer le théorème de caractérisation séquentielle de la limite/ de la continuité d'une fonction.
16. Enoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction continue sur un fermé borné.
17. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne. Que peut-on dire d'une application lipschitzienne ?
18. Enoncer les théorèmes donnant la continuité d'une application linéaire/ multilinéaire en dimension finie.
19. Que peut-on dire des parties $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, $f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$, $f^{-1}(\{0\})$ si $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ est continue ?
20. (a) Soit E l'ensemble des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'application $N_\infty : f \mapsto \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$ définit une norme sur E.
    (b) Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $N_1 : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Montrer que N_1 est bien définie et est une norme sur E.
21. *(*) Normes subordonnées : voir compléments de cours*

INTEGRATION

1. Donner sans démonstration des primitives des fonctions suivantes (on donnera bien comme réponse des FONCTIONS !) :

   1. $f : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$ 2. $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$ 3.$h : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} \end{cases}$ 4. $u : \begin{cases} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x) \end{cases}$

   5. $v : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ 6. $w : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$
2. Enoncer le théorème fondamental du calcul intégral.
3. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$. Justifier que F est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et déterminer F'.
4. Enoncer le théorème des sommes de Riemann.
5. Déterminer la limite en $+\infty$ de : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
6. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
7. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Donner la définition de : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
8. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, que vaut la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$?
9. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Donner la définition de : $\int_a^b f(t)dt$ converge.
10. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Donner la définition de : $\int_a^b f(t)dt$ converge.
11. Enoncer la propriété de stricte positivité pour les intégrales généralisées.
12. Donner la nature des intégrales de Riemann.
13. Montrer que pour tout $a > 0$ $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable en $+\infty$ et que ln est intégrable en 0.
14. Enoncer le théorème de changement de variables strictement croissant pour l'intégration sur un intervalle ouvert.
15. Enoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
16. Donner la définition d'une fonction intégrable sur I.
17. Montrer à l'aide d'un exemple que $f(t) \to_{t \to +\infty} 0$ n'implique pas f intégrable en $+\infty$.
18. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et intégrable. Montrer que cette limite est nécessairement nulle.
19. Enoncer le théorème de comparaison pour les fonctions intégrables (utilisant une majoration, une domination, un équivalent)
20. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

21. Etudier la nature des intégrales suivantes : a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t}dt$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}dt$.
22. Montrer la convergence et donner la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
23. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$.
24. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente. *Montrer qu'elle ne converge pas absolument.*
25. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
26. Enoncer les théorèmes donnant la continuité, le caractère C^1, le caractère C^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ des fonctions définies par une intégrale à paramètres.
27. Enoncer le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
28. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. *Montrer qu'elle est de classe C^1, C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

SERIES ENTIERES

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Enoncer le lemme d'Abel. *Le démontrer.*
3. Soit $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Quelle est la nature (convergence/divergence) de la série numérique de terme général $a_n z^n$ en fonction de z ?
4. Enoncer et démontrer la règle de d'Alembert pour les séries entières.
5. Soient $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_A et R_B.
   (a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n (a_n + b_n) z^n$?
   (b) Donner le résultat concernant la série entière produit de Cauchy de ces deux séries
6. Soit $\displaystyle\sum_n a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Que peut-on dire de la série de fonctions $\displaystyle\sum_n a_n t^n$ en termes de convergence ? Quel résultat de régularité a-t-on sur f sur $]-R, R[$? Expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}$ a_n en fonction des dérivées successives de f.
7. Donner la définition d'une fonction développable en série entière.
8. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{2^n}$ et calculer sa somme.
9. Donner les développements en série entière en précisant les rayons de convergence des fonctions suivantes :
   $x \mapsto \ln(1+x)$ $x \mapsto \exp(x)$ $x \mapsto \sin(x)$ $x \mapsto (1+x)^\alpha$ $x \mapsto (1+x)^\alpha$ $x \mapsto \arctan(x)$.
   $x \mapsto \cos(x)$ $x \mapsto -\ln(1-x)$ $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
10. Démontrer la formule du DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (en utilisant une équation différentielle).
11. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_n \mathrm{ch}(n) z^n$ et calculer sa somme.
12. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{z^n}{n^2}$.
13. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$?
14. Développer en série entière la fonction : $f : x \mapsto e^x \ln(1+x)$, on précisera sur quel intervalle.
15. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n^2+6} z^{2n}$. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières ?

16. Rayon de convergence et calcul de somme de $\sum_n \frac{x^n \cos(n\theta)}{n!}$
17. Domaine de définition de la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$?
18. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ puis montrer que sa somme définit une fonction continue sur $[-1, 1]$.
19. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(0) = 1$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$.

PROBABILITES

1. Quel est le nombre de p-uplets d'éléments d'un ensemble de cardinal n ?
2. Quel est le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n ?
3. Quel est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n ?
4. Donner la définition d'un ensemble dénombrable.
5. Donner la définition d'une tribu.
6. Donner la définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
7. Enoncer la propriété de continuité décroissante d'une probabilité P.
8. Enoncer la propriété de continuité croissante d'une probabilité P.
9. Enoncer la probabilité de sous-additivité d'une probabilité P.
10. A et B étant deux événements, donner la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B.
11. Enoncer la formule des probabilités composées.
12. Donner la définition d'un système complet <u>dénombrable</u> d'événements.
13. Enoncer la formule des probabilités totales.
14. Enoncer la formule de Bayes.
15. Donner la définition de l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$.
16. Donner la définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E.
17. Expliciter les lois usuelles (uniforme, Bernouilli, binômiale, géométrique, de Poisson). Pour X une variable aléatoire suivant une loi usuelle, on explicitera $X(\Omega)$, $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$, $E(X)$, $V(X)$ (les calculs doivent savoir être refaits).
18. Donner la définition de l'espérance, de la variance, de l'écart type d'une variable aléatoire (sous quelles hypothèses sont-elles finies ?)
19. Soient X et Y indépendantes d'espérance finie. *Montrer que XY est d'espérance finie et que $E(XY) = E(XE(Y)$.*
20. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$. Montrer que XY est d'espérance finie.
21. Si X et Y sont deux variables aléatoires, définir la covariance de X et de Y (en précisant les hypothèses sous lesquels elle existe). Que peut-on dire si elles sont indépendantes ?
22. Enoncer le théorème de transfert.
23. *Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance ssi la série $\sum P(X \geq n)$ converge et que dans ce cas $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.*
24. Que peut-on dire de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes ? De $V(aX + b)$ si $a, b \in \mathbb{R}$?
25. Que dit le lemme des coalitions ?
26. Enoncer l'inégalité de Markov.
27. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

28. Enoncer la loi faible des grands nombres.
29. Définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de son rayon de convergence et pourquoi ?
30. Quelle propriété a-t-on concernant l'espérance/ la variance d'une variable aléatoire faisant intervenir sa série génératrice ?
31. Montrer que G_X est continue sur $[-1, 1]$.
32. Commet récupérer la loi de X connaissant G_X ?
33. Que peut-on dire de G_{X+Y} si X et Y sont indépendantes ?
34. Donner l'expression des fonctions génératrices (avec leurs domaine de définition) de variables aléatoires suivant les lois usuelles : uniforme, de Bernouilli, binômiale, géométrique, de Poisson.
35. Loi de $X + Y$ si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant :
    (a) chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
    (b) chacune une loi binômiale de paramètres n et respectivement p et $q \in]0, 1[$.
36. Comment trouver la loi de min (X,Y) ou max(X,Y) si X et Y sont deux variables aléatoire réelles indépendantes ?
37. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = j, Y = k) = \frac{(j + k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

    Déterminer la loi de X. On remarquera que pour des raisons de symétrie, Y a même loi que X. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
38. Une entreprise de dépannage à domicile intervient en 10 minutes lorsqu'un client appelle, mais avec une probabilité de retard $p = \dfrac{1}{4}$.
    (a) Un client appelle 4 fois. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de retards. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
    (b) Soit maintenant N la variable aléatoire égale au nombre d'appels dans la journée, on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de retards. Déterminer la loi conjointe de (N, Z) et en déduire la loi de Z.
    (c) Soit U la variable aléatoire associée au rang du premier appel qui mène à un retard. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de U.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
(b) Déterminer la fonction génératrice de X, et le rayon de convergence de sa série génératrice.
(c) La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, que vaut-elle ?

ALGEBRE LINEAIRE

A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

1. Savoir trouver une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ défini par un système d'équations.
2. Savoir trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ dont on connait une famille génératrice.
3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et $x \in E$. On note $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Que valent par définition $p(x)$ et $s(x)$?
4. Enoncer la définition d'une projection vectorielle de E puis le théorème de caractérisation des projections.

5. Enoncer la définition d'une symétrie vectorielle de E puis le théorème de caractérisation des symétries.
6. Donner la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice de E. Enoncer deux assertions pour caractériser le fait qu'une famille de vecteurs forme une base de E.
7. Donner la définition de : E_1,...,E_p sont en somme directe.
8. Donner la dimension du produit de p sous-espaces vectoriels de dimension finie.
9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; donner deux propriétés utilisant les dimensions équivalentes au fait que E_1,...,E_p sont supplémentaires dans E.
10. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Donner la définition d'une base adaptée à F, la définition d'une base adaptée à une somme directe.
11. Donner la définition d'un sous-espace F stable par u et la définition de l'endomorphisme induit par u sur F.
12. Donner la définition de deux matrices semblables.
13. Soit F un sous-espace vectoriel de E admettant une base $(e_1, ..., e_p)$ et $u \in L(E)$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $\forall \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) \in F$.
14. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que Ker$v$ et Imv sont stables par u.
15. Enoncer la caractérisation matricielle de la stabilité.
16. Définir la trace d'une matrice et en donner quatre propriétés.
17. Que vaut le déterminant d'une matrice de Van der Monde ?
18. Soient f, $g \in L(E)$. Montrer que Ker(f) $\subset$Ker($g \circ f$) et Im($g \circ f$) $\subset$Im(g).
19. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on $F \oplus G = F \oplus H \Rightarrow G = H$?
20. Soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, A la matrice dans B d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ laissant stable le sous-espace F=Vect(e_1, e_3). Décrire la forme de A puis la matrice de l'endomorphisme u_F induit par u sur F.
21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ est A. Déterminer KerΦ et ImΦ. Expliciter $\phi(P)$ en fonction des coefficients de P pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
22. Donner la définition d'une valeur propre de u (resp. A) et d'un vecteur propre de u (resp. A).
23. λ étant une valeur propre de u, donner la définition du sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
24. Soit A une matrice admettant une unique valeur propre λ. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.
25. Donner la définition du polynôme caractéristique de u, quel est son degré et son coefficient dominant et son coefficient constant ?
26. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité m_λ et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Donner un encadrement vérifié par la dimension de $E_\lambda(u)$.
27. Enoncer le résultat donnant une expression de la trace et du déterminant de A en fonction de ses valeurs propres.
28. Donner la définition de u endomorphisme diagonalisable.
29. Donner la définition de A matrice trigonalisable.
30. Enoncer trois théorèmes caractérisant le fait qu'un endomorphisme u est diagonalisable.
31. Enoncer le théorème caractérisant le fait qu'une matrice A est trigonalisable.
32. Donner la définition et les propriétés de la trace d'une matrice.
33. Enoncer le théorème de Cayley Hamilton.
34. Soit P un polynôme annulateur de A. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?
35. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 1$, E étant supposé de dimension $n \geq 1$. Donner la définition de F stable par u puis énoncer le théorème caractérisant matriciellement le fait que F est stable par u.

36. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Diagonaliser A dans $M_4(\mathbb{R})$; on explicitera D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

37. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

38. Donner un exemple de matrice 2×2 trigonalisable non diagonalisable

39. Donner un exemple de matrice non trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

40. Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de scalaires deux à deux distincts. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}, P \mapsto (P(a_0), ..., P(a_n))$ est un isomorphisme. Donner la définition des polynômes de Lagrange L_0,..., L_n associés à cette famille. Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ définit une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner la décomposition de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$?

41. Application : soient $a_1, ...a_d$ des scalaires deux à deux distincts et $(b_1, ..., b_d) \in \mathbb{K}^d$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $P(a_i) = b_i$. On explicitera P en fonction des polynômes de Lagrange associés aux a_i.

42. Définition d'un hyperplan, d'une forme linéaire.

43. Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent. Montrer qu'un tel endomorphisme est trigonalisable puis qu'il est non diagonalisable s'il est non nul.

44. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A^2 = Tr(A)A$, déterminer son polynôme caractéristique puis montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Tr(A) \neq 0$. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A = XY^T$.

ESPACES EUCLIDIENS

1. Donner la définition d'un produit scalaire, d'une norme euclidienne.
2. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (démonstration ? cas d'égalité ?)
3. Montrer que $(A, B) \mapsto Tr(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S_n(_R)$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont alors supplémentaires orthogonaux.
4. Soit E un espace euclidien. Donner trois manières de caractériser le fait qu'un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle.
5. soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Donner trois manières de caractériser le fait que A est une matrice orthogonale.
6. Donner la définition d'une réflexion.
7. Décrire les matrices orthogonales de $M_2(\mathbb{R})$ (resp. les isométries du plan).
8. Donner la définition d'un endomorphisme symétrique ou auto-adjoint.
9. Enoncer le théorème spectral.
10. Donner la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
11. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, on note (.|.) le produit scalaire sur E et ||.|| la norme associée et p_F la projection orthogonale sur F.
    (a) Donner la définition de $F^\perp$
    (b) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F. Montrer que : $\forall u \in E,\ u \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ (u|e_i) = 0$.
    (c) Soit $S = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E. A quelles conditions S est-elle orthonormale ?
    (d) Soit $x \in E$ et $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F. Donner l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$.
    (e) Soit $u \in E$. Donner la définition de d(u,F) puis préciser sa valeur en fonction de u.
    (f) Enoncer l'inégalité de Bessel.
12. Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire, équation d'un hyperplan.

13. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u
Même question si u est une isométrie.
14. Soit u une isométrie de E. Montrer que le spectre de u est inclus dans $\{-1, 1\}$ et que $\text{Ker}(u + id_E) \perp \text{Ker}(u - id_E)$.
15. Soit u auto-adjoint. Montrer que deux espaces propres distincts sont orthogonaux.
16. Démontrer qu'une projection est une isométrie ssi c'est une projection orthogonale. Même question pour une symétrie.
17. Soit E euclidien orienté de dimension n=2 ou 3. Donner la définition du produit mixte de $(u_1, ..., u_n) \in E^n$.
18. Soit E euclidien orienté de dimension 3 et u, $v \in E$. Donner la définition du produit vectoriel de u et v. item Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.
19. Description des matrices de $SO(3)(\mathbb{R})$.
20. Savoir trouver l'axe et l'angle d'une rotation décrite par sa matrice dans une base orthonormée directe.
21. Donner la définition d'une matrice symétrique positive (resp. définie positive) ; même question pour un endomorphisme. En donner une caractérisation spectrale.
22. Soit S une matrice symétrique définie positive. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^T SY$ définit un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
23. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, et H l'hyperplan $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$. Déterminer la matrice dans la base canonique de p_H la projection orthogonale par rapport à H puis de s_H la réflexion par rapport à H.
24. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.
25. Trouver l'ensemble des matrices M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.
26. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.*
27. Savoir construire une base orthonormée en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Donner l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène du premier ordre d'ordre 1.
2. Enoncer le théorème de Cauchy pour les équations linéaires d'ordre 1/ d'ordre 2.
3. Enoncer le principe de superposition pour les équations linéaires d'ordre 1/ d'ordre 2 à coefficients constants.
4. Connaitre la méthode de variations de la constante.
5. Enoncer le théorème de Cauchy linéaire pour les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.
6. Donner une base de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants suivant les solutions de l'équation caractéristique.
7. Sous quelle forme chercher une solution particulière d'une équation de la forme : $y'' + ay' + by = e^{mt}$?
8. Savoir chercher une solution développable en série entière d'une équation différentielle.

DERIVABILITE DE FONCTIONS VECTORIELLES

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$. Donner la définition de : f est dérivable en a.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire. Donner la dérivée de $L \circ f$.
3. Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^p$ dérivables et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ bilinéaire. Donner la dérivée de $B(f, g)$.
4. Soit (./.) un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables. Alors $\phi : t \mapsto (f(t), g(t))$ est dérivable : exprimer sa dérivée. Même question pour $\psi : t \mapsto ||f(t)||$ si f ne s'annule pas.
5. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^n$, f_1, $...f_n$:$I \to \mathbb{R}$ dérivables. Dérivée de $\Phi : t \mapsto det_B(f_1(t), ..., f_n(t))$?

CALCUL DIFFERENTIEL

1. Soit $a \in U$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Que signifie que f admet une dérivée partielle par rapport à la ième variable en a ? Une dérivée en a selon le vecteur v ?
2. Donner la définition de la différentielle en a d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 si $a \in U$ (U ouvert de $\mathbb{R}^p$). Quel est le gradient de f en a ?
3. Définition d'une fonction de classe C^1, C^2 ?
4. Enoncer le théorème de dérivation le long d'un arc.
5. Donner les dérivées partielles d'une fonction de la forme : $F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.
6. Expliciter le gradient et le laplacien de : $F : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de f.
7. Donner les définitions d'un minimum/maximum local/global. D'un point critique.
8. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^4 + y^4} \end{array} \right.$. Etudier le caractère C^1 de f sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'expression de ses dérivées partielles.
9. Etudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$ sur $B_F(01) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$.
10. Enoncer le théorème de Schwarz.
11. Donner la définition de la hessienne en a d'une fonction f de classe C^2 sur U. Quel type de matrice est-ce ?
12. Soit a un point critique de f supposée de classe C^2. Que peut-on dire de a si $H_f(a)$ (resp. -$H_f(a)$) est définie positive ? Que peut-on dire de $H_f(a)$ si f admet un extremum local en a ?
13. Soit f est de classe C^2 sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point critique de f. Enoncer le résultat donnant le lien entre le déterminant et la trace de $H_f(a)$ en fonction de la nature de a en tant qu'extremum.
14. Donner la définition d'un point régulier d'une courbe (resp. surface) définie par une équation $f(x, y) = 0$ (resp. $f(x, y, z) = 0$)
15. Donner une équation de la tangente (resp. du plan tangent) en un point régulier à une courbe (resp. surface) définie par une équation $f(x, y) = 0$ (resp. $f(x, y, z) = 0$).