DM 0 : A rendre le Lundi 1er septembre 2025

EXERCICE 1 : Analyse

1. On a $f(x) \sim_{x \to 0} \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0, la fonction prolongée notée g est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ par opérations et pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{x\sin(x) - 2 + 2\cos(x)}{x^3} \sim_{x \to 0} -\dfrac{x}{12} \to 0$ donc d'après le théorème de la "limite de la dérivée", g est bien C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} f(2t)dt - \int_0^{\frac{x}{2}} tf(2t)dt$ donc comme les intégrandes sont continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse, chaque terme définit une fonction de classe C^1 et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} f(2t)dt + \dfrac{x}{2}f(x) - \dfrac{x}{2}f(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{x}{2}} f(2t)dt$.

   (b) f' est de même C^1 et $f''(x) = \frac{1}{4}f(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - \frac{1}{4}y = 0$.

   (c) Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ae^{\frac{x}{2}} + be^{-\frac{x}{2}}$. Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ on trouve $a = b = \frac{1}{2}$.

3. L'expression est $f(x) = \exp(x\ln(x)\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right))$, on trouve avec un DL à l'ordre 1 que la limite en $+\infty$ vaut e.

EXERCICE 2 : Analyse : étude de fonctions : à faire sans calculatrice

Partie 1.

1. La fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ par opérations. On a $f(x) \to_{x \to 0^+} 0 = f(0)$ par croissances comparées donc f est continue à droite en 0 et de même $\dfrac{f(x)}{x} \to_{x \to 0^+} 0$ par croissances comparées donc f est dérivable à droite en 0, par contre $f(x) \to_{x \to 0^-} +\infty$ donc f n'est pas continue donc pas dérivable à gauche en 0.
2. La fonction est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $]0, \frac{1}{2}$ et décroissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, la courbe présente pour asymptote l'axe (Oy), l'axe (Ox) à gauche en 0, et une demi tangente horizontale à droite en 0.
3. Voir calculatrice.
4. La fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ comme produit de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ qui est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ (fonction rationnelle définie) et de $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ qui est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ (comme composée de exp qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, C^∞ sur $]0, +\infty[$).

5. Montrons par récurrence que pour tout $\in \mathbb{N}$, la propriété H_n : " il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$" est vraie.
H_0 est vraie, $P_0 = 1$ convient. H_1 est vraie, $P_1 = 1 - 2X$ convient.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$ donc $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)x^{2n+2} - (2n+2)x^{2n+1}P_n(x)}{x^{4n+4}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. On obtient donc :
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}}$$
en posant $P_{n+1} = X^2 P_n' - (2n+2)XP_n + P_n$ qui définit bien un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ puisque $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc H_{n+1} est vraie, par récurrence H_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2.

La fonction f_n est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = 1 + \frac{n}{2x} > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Par suite f_n est strictement croissante et, comme $f_n(1) = 1 - n \leqslant 0$ et $f_n(e^2) = e^2 > 0$, elle admet (théorème de la bijection, corollaire du TVI puisque f est continue) une unique (la monotonie stricte donne le fait que f_n est injective) racine a_n dans $[1, e^2]$. De plus, si $n \geqslant 2$, alors $f_n(1) < 0$, donc $a_n \in]1, e^2[$. On calcule ensuite
$$f_{n+1}(a_n) = a_n + \frac{n+1}{2} \ln a_n - (n+1) = \left(a_n + \frac{n}{2} \ln a_n - n\right) + \frac{1}{2} \ln a_n - 1 = f_n(a_n) + \frac{1}{2} \ln a_n - 1 = \frac{1}{2} \ln a_n - 1$$
Donc
$$f_{n+1}(a_n) \leqslant \frac{1}{2} \ln e^2 - 1 \leqslant 0.$$
Comme f_{n+1} est croissante et que son unique racine est a_{n+1}, l'inégalité ci-dessus prouve que $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc croissante, et majorée par e^2, donc elle converge, vers une limite $\ell \in]1, e^2]$. Si $\ell < e^2$, alors
$$0 = f_n(a_n) = a_n + \frac{n}{2}(\ln a_n - 2) \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda n$$
avec $\lambda = \frac{1}{2}(\ln \ell - 2) < 0$, ce qui est impossible. Par suite, $\lim a_n = e^2$.

EXERCICE 3 : Algèbre

1. On note Q le quotient et R le reste, qui est de degré au plus 1, donc on l'écrit $R = aX + b$. Dans l'égalité $P(X) = (X^2+1)Q(X) + aX + b$, on substitue X par une des racines de $X^2 + 1$, par exemple i. Comme $P(i) = \prod_{k=1}^{n}(i \sin \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n}) = \prod_{k=1}^{n} \exp(ik\pi/n) = \exp(i(\sum_{k=1}^{n} k)\pi/n) = \exp(i(n+1)\frac{\pi}{2})$, on obtient
$$ai + b = \omega.$$
où ω désigne $\exp(i(n+1)\frac{\pi}{2})$. Comme P et X^2+1 sont à coefficients réels, il en est de même de R, donc on sait que a et b sont réels. L'égalité ci-dessus donne alors immédiatement $b = Re(\omega)$ et $a = Im(\omega)$, d'où
$$R = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) X + \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

2. (a) $((1,1,1,0)(1,1,0,1))$ est libre (non proportionnels) donc forme une base de F et on trouve que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / y = x, x = z + t\}$.

(b) Un système d'équations de $F^\perp$ est par définition : $F^\perp)\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z = 0, x+y+t=0\}$ et une base est $((-1,0,1,1),(-1,1,0,0))$.

(c) On note $x \cdot y$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$, e_1 et e_2 les vecteurs de l'énoncé, et P le plan qu'ils engendrent. On commence par construire une base orthonormale de P par le procédé de Gram et Schmidt. Pour cela, $e_2' = e_2 - (e_2, e_1)\frac{e_1}{\|e_1\|^2} = (1,1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ est orthogonal à e_1 et appartient à P, et la famille (f_1, f_2) avec $f_1 = e_1/\|e_1\|$ et $f_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}$ est une base orthonormale de P :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$$
$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,-2,3).$$

Le cours affirme alors que l'expression de la projection orthogonale p sur P est $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $p(x) = (x \cdot f_1)f_1 + (x \cdot f_2)f_2$. Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on obtient

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1,0) + \frac{x_1+x_2-2x_3+3x_4}{15}(1,1,-2,3) \\ &= \frac{1}{15}(6x_1+6x_2+3x_3+3x_4, 6x_1+6x_2+3x_3+3x_4, 3x_1+3x_2+9x_3-6x_4, 3x_1+3x_2-6x_3+9x \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de p souhaitée :

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie que p est linéaire. De plus $p(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $p \circ p(z) = p(\bar{z} - jz) = z - \bar{j}\bar{z} - j\bar{z} + j^2 z = (1+j^2)z - (j+\bar{j})\bar{z}$.
Or $1+j+j^2 = 0$ car j est racine cubique de l'unité donc $1+j^2 = -j$ et $j+\bar{j} = 2Re(j) = -1$.
Donc $p \circ p(z) = -jz + \bar{z} = p(z)$, ce qui donne $p \circ p = p$ donc p est une projection de $\mathbb{C}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $z = a + ib$. On a :

$$z \in Kerp \Leftrightarrow \bar{z} = jz \Leftrightarrow a - ib = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{3}b + i(\sqrt{3}a - b)) \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}a$$

après calculs. Donc $z \in Kerp \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, z = a(1-\sqrt{3})$ ce qui montre que Ker$p$=Vect$(1 - i\sqrt{3})$, Ker p est donc une droite vectorielle.

(c) $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ (considéré ici comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) donc $p(1), p(i))$ est génératrice de Im p. On trouve après calculs que $p(i) = \frac{1}{\sqrt{3}}p(1)$ donc une base de Im p est $(p(1))$ ou $(3 - i\sqrt{3})$. Im p est bien une droite vectorielle (en accord avec le théorème du rang).

4. Φ est linéaire par le cours, c'est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et sa matrice dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On a $\Phi \circ \Phi = \Phi$ donc Φ est une symétrie de E par rapport à Ker$(\Phi - id) = S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques parallèlement à Ker$(\Phi + id) = A_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.