DM 0 : A rendre le Lundi 1er septembre 2025

EXERCICE 1 : Analyse

Les questions 1. 2. 3. sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Fonction définie par une intégrale.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t) f(2t) dt$.
   (a) Montrer que f est dérivable et calculer $f^{'}(x)$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.
   (c) Déterminer f.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

EXERCICE 2 : Analyse : étude de fonctions : à faire sans calculatrice

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \to \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite de f en 0, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Etudier les variations et les limites de f. Résumer ces résultats dans un tableau. Préciser les branches infinies.
3. Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
   On donne les valeurs approchées suivantes : $e^{-2} \simeq 0.135$, $e^{-1} \simeq 0.36, e \simeq 2.72$
4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \ ]0,+\infty[,\quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$$
$$\text{avec} \quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x) \qquad (1)$$

   On précisera P_0 et P_1.

Partie 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, on note $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \; : x \mapsto x + \frac{n}{2} \ln x - n$.

1. Soit $n \geq 2$. Justifier que f_n est dérivable puis dresser son tableau de variations.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $a_n \in [1, e^2]$.
3. Déterminer pour tout $n \geq 2$ le signe de $f_{n+1}(a_n)$. En déduire que la suite $(a_n)_n$ est croissante.
4. Justifier que la suite $(a_n)_n$ converge. On note ℓ sa limite. Que peut-on dire de ℓ ?
5. Déterminer ℓ. On pourra raisonner par l'absurde.

EXERCICE 3 : Algèbre

Les question 1. 2. 3. et 4. sont indépendantes.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de $P = \prod_{k=1}^{n} (X \sin(k\frac{\pi}{n}) + \cos(k\frac{\pi}{n}))$ par $X^2 + 1$.

2. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique.
   (a) Déterminer une base puis un système d'équations de $F = \text{Vect}\{(1,1,1,0), (1,1,0,1)\}$.
   (b) Déterminer une base et un système d'équations de $F^\perp$.
   (c) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}$.
   On définit l'application $p : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto p(z) = \bar{z} - jz \end{array} \right.$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que p est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que p est une projection de E.
   (c) Déterminer $\text{Ker}(p)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.
   (d) Déterminer $\text{Im}(p)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.

4. On considère $\phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), A \mapsto A^T$.
   (a) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que ϕ est une symétrie et préciser ses espaces caractéristiques.