

TD 0 : Révisions d'analyse

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite de réels. Justifier les assertions suivantes :

1. Si (u_n) est dominée par une suite bornée alors (u_n) est bornée.
2. Si (u_n) est dominée par une suite qui tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.
3. Si (u_n) est négligeable devant une suite bornée alors (u_n) tend vers 0.
4. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels convergeant vers 1. Justifier qu'il existe un rang à partir duquel $u_n \geq \frac{1}{2}$.
5. Si $(u_n)_n$ est croissante et admet une suite extraite majorée alors $(u_n)_n$ converge. Donner un exemple montrant que c'est faux sans l'hypothèse de croissance.
6. Si $(u_n)_n$ est non majorée, montrer qu'elle admet une suite extraite tendant vers $+\infty$.

Exercice 2 : Théorème de Césaro

1. **Théorème de Césaro :** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite l . Montrer que la suite

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \text{ où } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ est convergente de limite } l.$$

2. Montrer que la réciproque est fausse.

3. *Application :* Soit (u_n) une suite de réelle vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$.

Etudier la convergence de (u_n) puis donner un équivalent de u_n (on étudiera la suite $(u_{n+1}^3 - u_n^3)$).

4. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ et $(v_n)_n$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k. \text{ Montrer que } v_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 3 : Croissances comparées Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Montrer l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall k \geq n_0, \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $a^n = o(n!)$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction continue un intervalle I , $x_0 \in I$, tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) > 0$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la suite $(f(n))_n$ diverge vers $+\infty$. A-t-on $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$? Justifier. On suppose de plus que f est croissante. Justifier que $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 6 : Fondamental

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est bornée.

Exercice 7 : Borne supérieure/inférieure

1. Montrer que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$.
2. En déduire que l'ensemble $E = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} / (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure que l'on déterminera.