

TD 1 : Suites et séries numériques

Fondamentaux de base : EX 1, 2, 7, 8, 17.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 6, 14, 15.

Exercice 1 : Etudier la nature de séries

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{n^5 \ln n^2}{e^n}$ 2. $\frac{\ln(n)^{2021}}{n^2}$ 3. $\frac{1}{5^n - n^8}$ 4. $(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)})$
5. $\ln(n)$ 6. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 7. $\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ 8. $n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
9. $\frac{n^n}{e^n n!}$ 10. $\frac{n!}{(2n)!}$ 11. $\int_n^{2n} \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{n^2 + \cos^2(x)} dx$
18. $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ 19. $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}}$ 20. $\frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$ 21. $\left(\frac{1}{5}\right)^n \binom{2n}{n}$

Exercice 2 : Convergence et calculs de sommes

Vérifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\text{sh}(n)}{3^n}$ 2. $\sum \frac{(1+i)^n}{(1+i\sqrt{3})^n}$ 3. $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n(n+1)!}$
4. $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$ ($x \in]-1, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$) 5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n}{e^{2n}}$ 6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 3 : Calcul de la somme de la série harmonique alternée.

1. En utilisant $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 4 : Terme général comportant un paramètre :

Soient a un réel quelconque et $u_n = (e - (1 + \frac{1}{n})^n)^a$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n .
2. Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 5 : Lien suite série

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 6 : Lien suite-série

Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{(\ln(n))^2}{2} + C + o(1)$.

Exercice 7 : Comparaison série-intégrale

Pour $\alpha > 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ selon α .

Exercice 8 : Comparaison série-intégrale

Déterminer un équivalent de : $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 9 : Convergence absolue ou séries alternées

Etudier la nature de la série de terme général :

$$1. \sum (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad 2. u_n = (-1)^n n^\alpha \left[\frac{1}{n} - \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right] \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 10 : Résultats abstraits

Soit $\sum u_n$ une série convergente à terme positifs.

Montrer que les séries $\sum u_n^2$, $\sum \frac{u_n}{\sqrt{1+n}}$ et $\sum \frac{u_n}{n}$ convergent.

Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est plus supposée positive, $\sum u_n^2$ peut être divergente.

Exercice 11 : Utilisation du théorème sur les séries alternées

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln(\ln(n))}}$.

Exercice 12 : Calcul classique

En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 13 : Série exponentielle

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x (pour $x \in \mathbb{R}$) à la fonction exponentielle montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Exemple : calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$.

Exercice 14 : Séries de Bertrand

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ et des séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

1. Etudier la nature des séries suivantes : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$.
2. On suppose $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En utilisant une comparaison à une série de Riemann, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge.
3. On suppose $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. En utilisant une comparaison à la série $\sum \frac{1}{n}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge.
4. On suppose $\beta \leq 0$ et $\alpha = 1$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ diverge.
5. On suppose $\beta > 0$ et $\beta \neq 1$. A l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la série $\sum \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ converge. Déterminer un équivalent de sa somme partielle lorsqu'elle diverge.

Exercice 15 : Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels. On suppose que $(u_n)_n$ est décroissante à termes positifs et converge vers 0 et que la suite des sommes partielles (S_n) associée à la série $\sum v_n$ est bornée.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)S_n$ est convergente.
2. En déduire que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
3. Application : étudier la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 16 :

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs décroissante telle que $\sum_n u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 17 : Utilité du produit de Cauchy

1. On définit pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k 5^{n-k}}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge et calculer sa somme.
2. On pose pour tout $n \geq 1$: $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(n-k)!}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et calculer sa somme.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que : $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$