

TD 1 : Séries numériques : CORRIGES

Exercice 6 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} - n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$, et on montre que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge ce qui montre avec le lien suite série que la suite $(u_n)_n$ converge et donc qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c + o(1)$. Pour la convergence de la série, on fait un développement asymptotique, on obtient $u_n = O\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$ qui est le terme général d'une série convergente (car dominé par $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ par exemple).

Exercice 10 :

On a $u_n^2 = u_n \times u_n = o(u_n)$ puisque la série $\sum u_n$ converge donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n^2$ converge.

De même, $\frac{u_n}{\sqrt{1+n}} = O(u_n)$ car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ et $\sum u_n$ converge donc $\sum \frac{u_n}{\sqrt{1+n}}$ converge également.

De même, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\frac{u_n}{n} = o(u_n)$ donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 16 :

Comme la série converge, la suite (u_n) converge vers zéro, et comme elle décroît, elle est positive. On note S la somme de la série de terme général u_n . On effectue une transformation d'Abel sur la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la positivité des u_n permet d'écrire que

$$\begin{aligned} S &\geq S_n = \sum_{k=0}^n (k+1-k)u_k = \sum_{k=0}^n (k+1)u_k - \sum_{k=0}^n ku_k = \sum_{k=1}^{n+1} ku_{k-1} - \sum_{k=0}^n ku_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k). \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) décroît, la série $\sum k(u_k - u_{k-1})$ est à termes positifs, et l'inégalité ci-dessus montre que ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. Par différence, on en déduit que la suite de terme général $(n+1)u_n = S_n - \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ converge. On note ℓ sa limite. Si cette limite est non nulle, alors $u_n \sim \frac{\ell}{n+1} \sim \frac{\ell}{n}$, et la série $\sum u_n$ diverge, ce qui est impossible. Par suite, $\ell = 0$, et l'égalité $(n+1)u_n = nu_n + u_n$ avec (u_n) de limite nulle montre que

$$\lim(nu_n) = 0.$$