

TD 2 : Révisions et compléments d'algèbre linéaire.

Fondamentaux de base : EX 1, 2, 4, 5, 6, 10, 19, 23, 24.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 8, 12, 14, 15, 20.

Révisions

Exercice 1 : Les questions sont indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ est A . Déterminer $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$ puis $\text{Ker} \Phi$ et $\text{Im} \Phi$. Expliciter $\phi(P)$ en fonction des coefficients de P pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et Φ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $\Phi : M \mapsto AM - MA$. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et $\text{Ker} \phi$ et $\text{Im} \Phi$.

Exercice 2 : Supplémentaire, projection

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u = (1, -1, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (a, 1, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 1$.
2. On suppose ici $a = 1$ et $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
 - (a) Donner une base de F .
 - (b) Soit $t = (0, 1, 1)$. Montrer que $\text{Vect}(t)$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer le projeté du vecteur (x, y, z) sur F parallèlement à $\text{Vect}(t)$.

Exercice 3 : Sev supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$

Soient $P = 1 + 3X - X^3$, $Q = 1 + 2X + X^2 + X^3$, $R = 1 + 4X - X^2 - 3X^3$.

1. Déterminer le rang de la famille (P, Q, R) .
2. Donner un sous-espace supplémentaire G de $F = \text{Vect}(P, Q, R)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer alors le projeté de $A = -2 + X^2 - X^3$ sur F parallèlement à G puis le symétrique de A par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 4 : Noyau, image d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker} A$ et $\text{Im} A$.

Exercice 5 : Applications linéaires : révisions

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $f, g \in L(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
2. Montrer que $\text{Im} f \subset \text{Ker} g \Leftrightarrow g \circ f = 0$.
3. Que peut-on déduire pour f si $g \circ f = \text{id}_E$? Même question si $f \circ g = \text{id}_E$? Montrer que si $g \circ f = \text{id}_E$ on a $\text{Ker} g \oplus \text{Im} f = E$.

Exercice 6 : Applications linéaires : révisions

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.
2. Justifier que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E)$.

Exercice 7 : Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension n et $u \in L(E)$. u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. On appelle alors indice de nilpotence de u l'entier $i = \min\{p \in \mathbb{N} / u^p = 0\}$ tel que $u^{i-1} \neq 0$ et $u^i = 0$.

1. Justifier l'existence de i si u est nilpotent. Montrer que si u est nilpotent alors $\text{rg}(u) \leq n - 1$. En déduire que u n'est pas bijective.
2. On suppose u nilpotent d'indice i . Soit $x \in E$ tel que $u^{i-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{i-1}(x))$ est libre. Montrer que $i \leq n$.

3. On suppose u nilpotent d'indice n . Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Matrices à diagonale strictement dominante : (*)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Sous-espaces supplémentaires

Exercice 9 : Sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Soit dans $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, -1))$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -2))$.

1. Trouver une équation cartésienne de F puis de G .
2. Justifier sans calculs que $F \cap G \neq \{0_E\}$ puis déterminer un système d'équations et une base de $F \cap G$.
3. Déterminer un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F puis un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G .
4. Vérifier que l'on a : $F' \oplus F \cap G \oplus G' = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in L(E)$ tel que : $f^3 = 3f^2 - 2f$.

1. On pose $E_1 = \text{Ker} f$, $E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ et $E_3 = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. Justifier que E_1, E_2, E_3 sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels puis montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$.
2. On note pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ p_i la projection d'image E_i et de noyau $\oplus_{k \neq i} E_k$. Exprimer f en fonction de p_1, p_2, p_3 puis en déduire une expression de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de n, p_1, p_2, p_3 .
3. Déterminer les suites $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f^n = a_n \text{id}_E + b_n f + c_n f^2$.

Exercice 11 : Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Soit

$\Phi : \begin{cases} F \times G \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$ Montrer que Φ est une application linéaire, déterminer son noyau, son image.

Montrer que $\text{Ker} \Phi$ est isomorphe à $F \cap G$ puis retrouver la formule de Grassmann.

Sous-espaces stables, matrices par blocs

Exercice 12 : Déterminer l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. (cad laissant toutes les droites vectorielles stables).

Exercice 13

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles, calculer alors M^{-1} en fonction de A , B , C .
2. Soient $A_1, A_2 \in M_p(\mathbb{K})$ semblables, $B_1, B_2 \in M_q(\mathbb{K})$ semblables, et $C_1 \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

1. Justifier que n est pair.
2. Montrer que si $x \in E \setminus \{0_E\}$, $(x, u(x))$ est libre. Montrer que pour tout $y \notin \text{Vect}(x, u(x))$, $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
3. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme : $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trace et matrices semblables**Exercice 15 :**

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 16 :

Soient a, b, c trois complexes et $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & a \end{pmatrix}$. Calculer la trace de l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$: $u : N \mapsto MN$.

Exercice 17 : Changements de base

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0$ et $A \neq 0$.

1. Montrer que si $A^2 \neq 0$, alors A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $A^2 = 0$, alors A est semblable à $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 :

1. Montrer que si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\text{rg}(A) = 1$ alors $A^2 = \text{tr}(A)A$.
3. Montrer que si $A^T A = 0$ alors $A = A^T = 0$.

Exercice 19 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$.

1. Montrer que si $\text{rg}(f) = \text{tr}(f) = 1$ alors f est une projection.
2. Montrer que si f est une projection alors $\text{rg}(f) = \text{tr}(f)$.

Exercice 20 : Théorème du rang (*)

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r \geq 1$. Montrer qu'il existe deux matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que : $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On pourra considérer l'endomorphisme f canoniquement associé à A et une base adaptée à la décomposition $\text{Ker } f \oplus S = \mathbb{K}^p$.

Exercice 21 : (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un $(n+1)$ -uplet de réels deux à deux distincts et pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Phi_i : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(a_i)$.

1. Montrer que la famille $(\Phi_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer l'existence d'une unique famille de réels $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i).$$

Déterminants**Exercice 22 :**

Calculer les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 21 & 2 \\ 2 & 42 & 4 \\ 3 & 73 & 7 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+c \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 23 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$ et $n \geq 1$.

$$\text{On note } D_n \text{ le déterminant d'ordre } n \text{ suivant : } A_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & . & . & 0 \\ b & a & c & 0 & . & . \\ 0 & b & a & c & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & c \\ 0 & . & . & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 et D_2 puis exprimer pour $n \geq 3$ D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} .
2. En déduire la valeur de D_n dans le cas où $a = 3, b = 1, c = 2$ puis $a = 4, b = c = 2$.

Exercice 24 :

$$\text{Soit } (a, b) \in \mathbb{C}^2. \text{ Calculer le déterminant d'ordre } n \text{ suivant : } D_n = \begin{vmatrix} a & b & . & . & . & b \\ b & a & b & . & . & b \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & b \\ b & . & . & . & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 25 :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ on note } D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 3 & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & n+1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = (n+1)D_n + n!$.
2. En déduire une expression de D_n en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 26 :

Soit $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^T$. Calculer le déterminant de Φ .