

**TD 2 : CORRIGES.****Exercice 8 : Matrices à diagonale strictement dominante :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ . Montrer que  $A$  est inversible.

Correction : Une matrice  $A$  vérifiant l'hypothèse de départ est dite à *diagonale strictement dominante*. On raisonne par contraposition. Si  $A$  n'est pas inversible, il existe  $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tel que  $AX = 0$ . Soit  $i$  un indice tel que  $|x_i| = \max(|x_j|, 1 \leq j \leq n)$  : comme  $X$  est non nul, il en n'est de même de  $x_i$ . La  $i$ -ème ligne de l'égalité  $AX = 0$  s'écrit  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0$ . En transposant le terme numéro  $i$  et en divisant par le nombre non nul  $x_i$ , on obtient  $a_{i,i} = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$ . L'inégalité triangulaire et le choix de l'indice  $i$  montrent alors que

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui achève le raisonnement par contraposition.