

TD 3 : REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARREES ;

Fondamentaux de base : EX 1, 2, 3, 9, 11, 13.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 16, 17, 18, 21, 22.

Exercice 1 : Déterminer les éléments propres des matrices suivantes, dire si elles sont inversibles, diagonalisables ou trigonalisables et, dans ce cas, diagonaliser ou trigonaliser la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Diagonalisabilité sans calcul

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A .
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de A .
3. A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
4. Déterminer les sous-espaces propres de A et D diagonale, P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A .
2. Diagonaliser A dans $M_4(\mathbb{R})$; on explicitera D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A en fonction de a .
2. Etudier la diagonalisabilité de A en fonction de a .

Exercice 5 : Eléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Soit $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.

1. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de u alors P est de degré 3.
3. Déterminer alors le spectre de u et ses sous-espaces propres.

Exercice 6 : Eléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : E \rightarrow E$ définie par : $\forall u = (u_n)_n \in E$, $f(u) = v$ avec $v = (v_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} + 3u_n$.

Justifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer les éléments propres de f .

Exercice 7 : Eléments propres d'un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$.

Vérifier que u est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ puis déterminer ses éléments propres. u est-il bijectif ?

Exercice 8 : Valeurs propres et polynôme annulateur

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $A^4 = I_n$.

1. Montrer que $A^2 = I_n$. Quelles sont les valeurs propres de A ? Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associé à A .
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 9 : Spectre d'un endomorphisme nilpotent

A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables?
2. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n .
3. Montrer qu'une matrice triangulaire de $M_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Exercice 10 : Utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$ et $P(X) = X^2 + X + 1$.

1. Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A$, $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A$ et le polynôme caractéristique de A et justifier que n est un entier pair.
2. Déterminer la trace de A .

Exercice 11 :

Déterminer toutes les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, $\text{Tr}(A)=3$ et A non inversible.

Exercice 12 :

Soit $n \geq 3$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{rg}(A)=2$, $\text{Tr}(A)=0$ et $A - I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Déterminer le spectre de A . A est-elle diagonalisable?

Exercice 13 : Matrices de rang 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Montrer que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne, en déduire un polynôme annulateur de A puis déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable, on précisera les éléments propres de A .

Exercice 14 : Réduction en dimension n

1. Etudier la diagonalisation de la matrice de $M_n(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & b \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & b \\ c & . & . & c & 1 \end{pmatrix}$
2. Etudier la diagonalisation de la matrice de $M_n(\mathbb{R})$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15 : Calculs de puissance à l'aide d'une trigonalisation

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec a, b des réels que l'on précisera.
2. Calculer les puissances de A .
3. Déterminer en fonction de n les termes généraux des suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par :
$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -3x_n + y_n - 3z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 16 : Sous-espaces stables par un endomorphisme

1. Soit $u \in L(E)$ et $F \neq \{0_E\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Montrer que χ_{u_F} divise χ_u .
2. Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces propres de u . u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u . On commencera par les droites stables, pour les plans stables on utilisera 1. et 2.

Exercice 17 : Matrices compagnons

Soient $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ et C_P la matrice compagne :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Notons $P = X^2 - X - 1$. Déterminer C_P et son polynôme caractéristique.
2. Montrer que C_P est de rang n si $a_0 \neq 0$ et de rang $n - 1$ si $a_0 = 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\text{rg}(C_P - \lambda I_n) \geq n - 1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P .
4. Montrer que $\chi_{C_P} = (-1)^n P$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.

Exercice 18 : Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \in [0, 1]$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ (on dit que A est une matrice stochastique).

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .

2. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à λ et soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$. En écrivant l'égalité des i_0 -èmes lignes de AX et de λX , montrer que $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq 1 - a_{i_0 i_0}$.

3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 19 : Application de la diagonalisation

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 : Endomorphismes sur $M_n(\mathbb{R})$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $u \in L(E)$ défini par : $\forall M \in E$, $u(M) = aM + b^t M$.

Déterminer les éléments propres de u , montrer que u est diagonalisable, et calculer sa trace et son déterminant.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \text{tr}(A)M + \text{tr}(M)A$. Étudier les éléments propres de f , donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f soit diagonalisable.

Exercice 21 : Diagonalisabilité de u en fonction de celle de u^2 (*)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in L(E)$.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $u \Leftrightarrow \lambda^2$ est valeur propre de u^2 .
2. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ et que u^2 est diagonalisable.
3. Soient F un sous-espace vectoriel de E , $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $v \in L(F)$ tel que $v^2 = \lambda \text{id}_F$. Soit δ une racine carrée de λ . Montrer que $F = \text{Ker}(v - \delta \text{id}_F) \oplus \text{Ker}(v + \delta \text{id}_F)$.
4. En déduire la réciproque de 2.

Exercice 22 : Diagonalisabilité simultanée de deux endomorphismes qui commutent (*)

On utilisera le résultat suivant : si $v \in L(E)$ est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par v , l'endomorphisme induit v_F est encore diagonalisable.

Soient u et $v \in L(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes alors u et v sont diagonalisables et qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v .
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont simultanément diagonales.
3. Soient $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de $u_1, \dots, u_n$ sont simultanément diagonales.