

TD 3 : CORRIGES

Exercice 21 : Diagonalisabilité de u en fonction de celle de u^2 (*)

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u , alors λ^2 est valeur propre de u^2 (vu en cours). Pour la réciproque : d'abord si 0 est valeur propre de u^2 , $\text{Ker} u^2 \neq \{0_E\}$ donc il existe $x \neq 0$ tel que $u(u(x)) = 0_E$ donc soit $u(x) = 0_E$ auquel cas 0 est aussi valeur propre de u , soit $u(x) \neq 0$ et $u(x)$ est un vecteur non nul du noyau de u auquel cas 0 est valeur propre de u .
Si $\lambda^2 \neq 0$ est valeur propre de u^2 , il existe $x \neq 0$ tel que $(u^2 - \lambda^2 \text{id}_E)(x) = 0_E = (u - \lambda \text{id}_E) \circ (u + \lambda \text{id}_E)(x)$ donc de même soit λ soit $-\lambda$ est valeur propre de u . Les valeurs propres de u^2 sont exactement les carrés des valeurs propres de u .
- On a déjà $\text{Ker} u \subset \text{Ker} u^2$. Si B une base de E telle que $D = M_B(u)$ est diagonale. Alors $D^2 = M_B(u^2)$ est aussi diagonale donc u^2 est aussi diagonalisable et $\dim \text{Ker} u$ est le nombre de coefficients diagonaux nuls de D qui est le même que le nombre de coefficients diagonaux nuls de D^2 donc est égal à $\dim \text{Ker} u^2$ donc on a $\text{Ker} u = \text{Ker} u^2$.
- On montre le résultat par analyse synthèse (pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = \frac{1}{2\delta}(v(x) + \delta x)$ et $x_2 = \frac{-1}{2\delta}(v(x) - \delta x)$).
- Supposons u^2 diagonalisable et $\text{Ker} u = \text{Ker} u^2$ donc $E = \text{Ker} u \oplus \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u^2)$ en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de u^2 . Or u et u^2 commutent donc pour tout i , $F_i = E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u on peut donc définir u_i l'endomorphisme induit par u sur F_i qui vérifie par définition $v_i^2 = \lambda_i \text{id}_{F_i}$ donc en appliquant 3. et en notant δ_i une racine carrée de λ_i telle que $\delta_i^2 = \lambda_i$, $F_i = \text{Ker}(u - \delta_i \text{id}) \oplus \text{Ker}(u + \delta_i \text{id})$.
On obtient finalement $E = \text{Ker} u \oplus \bigoplus_{i=1}^r (\text{Ker}(u - \delta_i \text{id}) \oplus \text{Ker}(u + \delta_i \text{id}))$ donc u diagonalisable (certains des sous-espaces apparaissant dans la décomposition ci-dessus sont nuls, ceux non nuls sont les sous-espaces propres de u).

Exercice 22 : Codiagonalisation de deux endomorphismes qui commutent (*)

- Si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i(u)$ en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de u et $E_1(u), \dots, E_n(u)$ les sous-espaces propres associés. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i(u)$ est une droite stable par v puisque u et v commutent (cours) donc est aussi une droite engendrée par un vecteur propre pour v . Une base adaptée à la décomposition de E en somme directe ci-dessus est donc une base de vecteurs propres de u et de v qui diagonalise simultanément u et v .
- Supposons u et v diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$. On note $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E_i(u)$ l'espace propre de u associé à λ_i . On a $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i(u)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E_i(u)$ est stable par v car u et v commutent donc on peut définir v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_i(u)$. Cet endomorphisme est aussi diagonalisable (car v l'est d'après le résultat de cours rappelé dans l'énoncé) donc $E_i(u)$ admet une base B_i formée de vecteurs propres pour v . La famille $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ est une base de E (adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i(u)$) formée de vecteurs propres pour u et pour v donc qui diagonalise simultanément u et v .
- Le résultat du 2. se généralise par récurrence.