

TD 4 : Intégration sur un segment.

Fondamentaux de base : EX 2, 3, 4, 6, 7,.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 12, 13.

Exercice 1 : Fonctions continues par morceaux

1. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux ?

$$\begin{array}{lll} \text{a. } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} & \text{b. } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} & \text{c. } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x + [1 - x]} & x \mapsto \sin \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} & x \mapsto \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array}$$

2. Soit $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ e^x & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases}$ $f|_{[0,1]}$ est-elle continue ? $f|_{]1,2]}$ est-elle continue ? f est-elle continue sur $[0, 1]$? f est-elle continue par morceaux sur $[0, 2]$? Donner la valeur de $\int_{[0,2]} f$.

3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en tout point de $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points. f est-elle continue par morceaux sur $[a, b]$?

4. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$f|_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}$ est prolongeable par continuité sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. f est-elle continue en tout point de $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$? En déduire que f est continue par morceaux sur $]0, 1]$. f est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

5. Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}$ f est-elle continue par morceaux sur $[1, +\infty[$?

6. Soit $f: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$?

7. Soient deux entiers n et p tels que $n > p$. Calculer $\int_p^n \lfloor x \rfloor dx$.

Exercice 2 : Changements de variables

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables :

$$1. \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \quad 2. \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \text{ (penser à cos)} \quad 3. \int_0^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$$

Exercice 3 : Intégrations par parties

1. Calculer $\int_0^1 \ln(1 + x) dx$.

2. Calculer $\int_0^1 (\arctan x) dx$.

3. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$.

Exercice 4 : Fonction définie par une intégrale

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t + t^3}} dt$.

Exercice 5 : Fonction définie par une intégrale

On note $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + F(x).$$

Exercice 6 : Lemme de Riemann Lebesgue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$.

Exercice 7 : Sommes de Riemann

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ de terme général :

$$1. u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k+n} \quad 2. u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p \quad 3. u_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{(1 + \frac{k^2}{n^2})^3}}$$

Exercice 8 : Sommes de Riemann

Soit $(u_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = ((n+1)(n+2) \dots (n+n))^{\frac{1}{n}}$. Déterminer un équivalent de u_n .

Exercice 9 : CCINP 2022

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x} dx$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_1^{n+1} \frac{x - \frac{1}{2} - \lfloor x \rfloor}{x} dx = n + \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1)$.
3. Montrer que lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge.

Exercice 10 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

Exercice 11 :

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\forall u \in E$, $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^x e^t f(x-t) dt$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E puis déterminer ses éléments propres.

Exercice 12 :

1. Soit pour tout $t > 0$, $f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction g continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Exercice 13 : MT 2023

Soient $a, b > 0$. Déterminer la limite quand $x \rightarrow 0$ de $\int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t} dt$.