

TD 5 : Espaces vectoriels normés.

Fondamentaux de base : EX 1, 2, 3, 4, 11 1. 2.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 6, 10, 11 3.

Exercice 1 : Normes ou pas

Déterminer si les applications suivantes définissent des normes ou non :

$$N_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + |y| \end{cases} \quad N_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |x| + |y - x| \end{cases}, \quad N_3 : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \\ A \mapsto \sup\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\} \end{cases}$$

Exercice 2 : Norme sur $\mathbb{R}[X]$

Si $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on définit : $N_1(P) = \sum |a_k|$, $N_2(P) = \max_k |a_k|$ et $N_3(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$.

1. Montrer que N_1 , N_2 et N_3 définissent des normes sur E .
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 : Norme associée à un produit scalaire sur un espace de fonctions

Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que N définit une norme sur E .
2. La norme N et la norme préhilbertienne canonique sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 4 : Normes sur un espace de fonctions de dimension infinie

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et N_1 , N définies par :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \quad \text{et} \quad N(f) = |f(0)| + \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

Démontrer que N est une norme sur E . Déterminer une suite de fonctions $(f_n)_n$ de E telle que $N_1(f_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et $N(f_n)$ ne tende pas vers 0. Les normes N_1 et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ et d'une norme

$\|\cdot\|_E$. On définit pour tout $f \in L(E)$, $N(f) = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_E$. Montrer que N définit une norme sur $L(E)$.

Exercice 6 : Norme subordonnée

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|AX\| \leq \|A\| \|X\|$.
3. Montrer enfin que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exercice 7 : Une norme sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soit E l'ensemble des suites **bornées** de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note pour tout $u = (u_n)_n \in E$: $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$

et $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes.

Exercice 8 : Une norme sur $M_p(\mathbb{C})$

On définit pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in M_p(\mathbb{C})$ $N(A) = \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N est une norme sur $M_p(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\forall A, B \in M_p(\mathbb{C}), N(AB) \leq pN(A)N(B)$.
3. En déduire que : $\forall A \in M_p(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}^*, N(A^n) \leq p^{n-1}(N(A))^n$.
4. Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ telle que $N(A) \leq \frac{1}{p^2}$. Montrer que $(A^n)_n$ est une suite convergente dont on précisera la limite.

Exercice 9 : Convexes

1. Montrer que la partie de $\mathbb{R}^n : \Delta_n = \{a = (a_i)_{1 \leq i \leq n} / \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$ est convexe.
2. Soient E et F des espaces vectoriels normés et soit $f \in L(E, F)$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ des convexes. Montrer que $f(A)$ est un convexe de F et que $f^{-1}(B)$ est un convexe de E .

Exercice 10 : Soient E un espace vectoriel de dimension p , $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . On appelle rayon spectral le réel positif $\rho(u) = \max\{|\lambda| / \lambda \in Sp(u)\}$.

Pour tout $x \in E$, on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et on pose : $\|x\| = \sum_{i=1}^p |x_i|$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
2. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ en posant : $\forall v \in \mathcal{L}(E), N(v) = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|v(x)\|}{\|x\|}$.
3. Montrer que si λ est valeur propre de u et n est un entier naturel non nul, alors $N(u^n) \geq |\lambda|^n$.
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*, (N(u^n))^{\frac{1}{n}} \geq \rho(u)$.
5. Justifier, pour tout $x \in E$:

$$\|u^n(x)\| \leq (\rho(u))^n \|x\|.$$

6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (N(u^n))^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 11 : Suites de matrices

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n & \frac{\ln(n+3)}{2n+6} \\ n^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) & \frac{1}{n^2 + 3 - n \cos(n)} \end{pmatrix}$$

2. Soit D une matrice diagonale de $M_p(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_p$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les d_i pour que la suite $(D^n)_n$ converge.

3. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer T^k pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite de matrices de terme général $M_n = \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$.