

EXERCICE 12

CORRIGES TD4

- 1) f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f(t) = \frac{t - t^3/6 = t + o(t^3)}{t^2} = -\frac{t}{6} + o(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0

en $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ qui est continue.

- 2) Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est bien continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

ainsi que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt &= \int_x^{2x} f(t) dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_x^{2x} f(t) dt + [\ln t]_x^{2x} \\ &= \int_x^{2x} f(t) dt + \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{or } \int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^{2x} g(t) dt = G(2x) - G(x)$$

si on note G une primitive de g sur $\mathbb{R}^+$.

G étant continue en 0 (car C^1 sur $\mathbb{R}^+$), $G(2x) - G(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} G(0) - G(0) = 0$

$$\text{donc } \int_x^{2x} f(t) dt \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$$

$$\text{Donc } \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \ln 2.$$

EXERCICE 5

- 1) $f: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $F: x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est bien C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ (primitive de f qui s'annule en 1).

$$\begin{aligned} \forall x > 0, F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1/x} f(t) dt = - \int_1^x f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2} du = - \int_1^x \frac{\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}{u} du \\ &\quad \text{en posant } u = \frac{1}{t} \quad \begin{cases} du = -\frac{1}{t^2} dt \\ du = -\frac{1}{u^2} dt \end{cases} \quad (\varphi: t \mapsto 1/t \text{ } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}) \\ &= - \int_1^x \frac{\ln(1+u)}{u} du + \int_1^x \frac{\ln u}{u} du \\ \text{dc } F\left(\frac{1}{x}\right) &= -F(x) + \left[\frac{(\ln u)^2}{2}\right]_1^x = -F(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \end{aligned}$$

$$2) \text{ Soit } x > 0. \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \int_1^x \frac{\ln(x)}{t} dt + \int_1^x \frac{\ln(1+t/x)}{t} dt = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(1+\frac{t}{x})}{t} dt$$

$$\text{Or } \int_1^x \frac{\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t} dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(1+u)}{xu} du = - \int_1^{1/x} \frac{\ln(1+u)}{u} du = -F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt &= (\ln x)^2 + F(x) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \text{ d'après 1)} \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + F(x). \end{aligned}$$

EXERCICE 9

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x - 1/2 - L(x)}{x}$ est CPM.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [k, k+1[$, $L(x) = k$ donc

$$\begin{aligned} J_k &= \int_k^{k+1} \frac{x - 1/2 - L(x)}{x} dx = \int_k^{k+1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{k}{x} \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\ln(k+1) - \ln(k)) - k (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= 1 - \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n = \sum_{k=1}^n J_k = \sum_{k=1}^n 1 - \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

d'après la relation de Charles.

$$\begin{aligned} \text{donc } I_n &= n - \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2} \right) (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= n - \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2} \right) \ln(k) + \sum_{k=1}^n \ln k \\ &= n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) + \ln \left(\prod_{k=1}^n k \right) = n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) + \ln n! \end{aligned}$$

par télescopage

3) La formule de Stirling donne $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$

$$\text{donc } n! = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} + o\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \ln n! &= \ln \left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} + o\left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}\right) \right) \\ &= \ln \left(\frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \right) + \ln(1 + o(1)) \\ &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln n + o(1) \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1) \end{aligned}$$

$$4) \quad I_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) (\ln(n) - \ln(n+1)) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1)$$

$$= -\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \sqrt{2\pi} + o(1)$$

$$= -\left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \ln \sqrt{2\pi} + o(1)$$

$$= -1 + \ln \sqrt{2\pi} + o(1)$$

donc $(I_n)_n$ converge vers $\ln \sqrt{2\pi} - 1$.

Exercice 8

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = ((n+1)(n+2)\dots(n+n))^{1/n}$$

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k+n)$$

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln n + \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) = \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$\xrightarrow{[0,1] \rightarrow [1,2]}$
et $\ln(1+t)$ étant continue, on a d'après le Th
sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt$$

$$\text{et } \int_0^1 \ln(1+t) dt = \left[(1+t) \ln(1+t) - t \right]_0^1 \\ = 2 \ln 2 - 1$$

$$\text{donc } v_n = \ln n + 2 \ln 2 - 1 + o(1)$$

$$u_n = e^{v_n} = e^{\ln n} e^{2 \ln 2 - 1 + o(1)}$$

$$\text{donc } u_n = 4n \times e^{-1 + o(1)}$$

$$= \frac{4n}{e} (1 + o(1))$$

$$\text{finalement } \underline{\underline{u_n \sim \frac{4n}{e}}}$$

Exercice 13

Soyent $a, b > 0$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt &= - \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} dt \\&= - \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos t}{t} dt + \left[\ln t \right]_{ax}^{bx} \\&= \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos t}{t} dt\end{aligned}$$

or $f: t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

et prolongeable par continuité en 0 puisque

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2} \rightarrow 0$$

on pose alors $\tilde{f}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}^+$.

$$\int_{ax}^{bx} f(t) dt = \int_{ax}^{bx} \tilde{f}(t) dt = F(bx) - F(ax)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0) - F(0) = 0 \text{ car } F \text{ est } C^1$$

donc continue sur $\mathbb{R}^+$

donc en particulier en 0

$$\text{donc } \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Finalement

$$\int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Exercice 10

f est continue sur $[0,1]$ donc en 1 et $f(1)=0$.

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 = f(1)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta > 0, \forall x \in [1-\delta, 1], |f(x)| < \varepsilon(x)$

Or $n \int_0^1 x^n f(x) dx = n \int_0^{1-\delta} x^n f(x) dx + \int_{1-\delta}^1 x^n f(x) dx$ (relation de Chasles)

$$\text{donc } \left| n \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq n \left| \int_0^{1-\delta} x^n f(x) dx \right| + \left| \int_{1-\delta}^1 x^n f(x) dx \right|$$

$$\text{D'une part } \left| n \int_{1-\delta}^1 x^n f(x) dx \right| \leq n \int_{1-\delta}^1 x^n |f(x)| dx$$

$\forall x \in [1-\delta, 1], x^n |f(x)| \leq \varepsilon \cdot x^n$ d'après (*)

$$\text{donc } \left| n \int_{1-\delta}^1 x^n f(x) dx \right| \leq \varepsilon n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{1-\delta}^1 \leq \frac{\varepsilon n}{n+1} \leq \varepsilon$$

D'autre part, en notant $M = \sup_{[0,1]} |f|$ (f est bornée sur $[0,1]$ car C^0)

$$n \left| \int_0^{1-\delta} x^n f(x) dx \right| \leq n \int_0^{1-\delta} |f(x)| x^n dx \leq n \int_0^{1-\delta} M x^n dx$$

car $\forall x \in [0,1-\delta], x^n \geq 0$ donc $x^n |f(x)| \leq M x^n$ par utilisation de l'intégrale

$$\text{donc } n \left| \int_0^{1-\delta} x^n f(x) dx \right| \leq n M \left[\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1} \right] \leq M (1-\delta)^{n+1}$$

$$\text{or } 0 < 1-\delta < 1 \text{ donc } (1-\delta)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow M (1-\delta)^{n+1} < \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall n \geq n_0, \left| n \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui montre que $n \int_0^1 x^n f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 11

Soient $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \phi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x e^t (\lambda f + g)(x-t) dt \\ &= \int_0^x e^t \lambda f(x-t) dt + \int_0^x e^t g(x-t) dt \\ &\quad \text{par linéarité de } \int \\ &= \lambda \phi(f)(x) + \phi(g)(x) \quad \text{de } \phi(\lambda f + g) = \lambda \phi(f) + \phi(g) \end{aligned}$$

donc ϕ est linéaire

Avec le changement de variables $u = x - t$ ($\phi: t \mapsto x - t$ est C^1)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(f)(x) = \int_0^x e^{x-u} f(u) du = e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du.$$

Or e^x est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \int_0^x e^{-u} f(u) du$ est C^1 de continue (primitive de $u \mapsto e^{-u} f(u)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$)

Donc : $\forall f \in E, \phi(f) \in E$.

car $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.

ϕ est donc un endomorphisme de E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\phi(f) = \lambda \cdot f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du = \lambda f(x)$ (*)

Soit $f \in E$ tq $\phi(f) = \lambda f$.

Alors par produit, $x \mapsto f(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda f'(x) = e^x \int_0^x e^{-u} f(u) du + e^x e^{-x} f(x) = \lambda f(x) + f(x)$$

$$\text{donc } \lambda f'(x) - (\lambda + 1)f(x) = 0$$

donc f est solution de : $\lambda y' - (\lambda + 1)y = 0$

Si $\lambda = 0$, cela donne $f = 0$ (absurde pour un vecteur propre)

donc $0 \notin \text{Sp}(f)$.

Si $\lambda \neq 0$, f solution sur $\mathbb{R}$ de $y' - \frac{\lambda+1}{\lambda} y = 0$

$$\text{donc : } \exists C \in \mathbb{R}, f: x \mapsto C \cdot e^{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x}$$

(*) donne (pour $x = 0$) $\lambda f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$

donc $C = 0$.

donc $f = 0$ (absurde pour un vecteur propre)

donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in \text{Ker}(\phi - \lambda \text{id}) \Leftrightarrow f = 0$

$$\underline{\text{Sp } \phi = \emptyset.}$$