

TD 6 : Intégration sur un intervalle.

Fondamentaux de base : EX 1, 2, 5.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : EX 7, 9, 14.

Exercice 1 : Nature d'intégrales généralisées

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t^3} dt$ 2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt$ 3. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 4. $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ 5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$
6. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)^5}{t^2} dt$ 7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t} dt$ 8. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)^3} dt$ 9. $\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} dx$ 10. $\int_0^1 \frac{1}{\arccos(t)} dt$

Exercice 2 : Calculs d'intégrales convergentes

Justifier la convergence et donner la valeur des intégrales suivantes :

1. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(t-1)(t-2)} dt$ 2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2} dt$ 4. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$ 5. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}$

Exercice 3 : Calcul d'une intégrale convergente

1. Déterminer suivant $\alpha > 0$ la nature de : $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^\alpha}\right) dt$
2. Calculer cette intégrale pour $\alpha = 2$.

Exercice 4 :

Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{e^{ix}}{x^\alpha}$.

1. Etudier l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$ en fonction de α .
2. Montrer en utilisant une intégration par parties que pour $0 < \alpha < 2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ converge.

Exercice 5 : Fonction Gamma

Pour $x \in \mathbb{R}$ on considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et on note $\Gamma(x)$ sa valeur en cas de convergence.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge. On peut alors définir sur D la fonction Γ d'Euler : $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 6 : Calcul de $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

Montrer l'existence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. Comparer I et J puis en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 7 : On considère $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$. Justifier l'existence de I et J , montrer que $I = J$, puis calculer $I + J$ et en déduire la valeur de I et J .

Exercice 8 : Intégrabilité et limites et fonctions bornées, Vrai/Faux

1. Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
 - (a) Montrer que si $\ell \neq 0$ alors f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - (b) Donner un exemple de fonction pour laquelle $\ell = 0$ et f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
Donner un un exemple de fonction pour laquelle $\ell = 0$ et f est intégrable $[0, +\infty[$.
2. Soit $f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$. En distinguant les cas $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$, déterminer si f est intégrable sur $[0, 1[$.
3. Une fonction continue par morceaux positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ admet-elle nécessairement une limite en $+\infty$? Est-elle nécessairement bornée?
4. Si $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, a-t-on : si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. A-t-on :
 - (a) Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors f se prolonge par continuité en a et b .
 - (b) Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors f est bornée.
 - (c) Si f est bornée alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exercice 9 : Fonction définie par une intégrale

Soit $f: x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Préciser le domaine de définition de f . Montrer que f est dérivable et calculer f' .
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10 : Fonction définie par une intégrale

Pour $x > 0$ on pose $F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} dt$.

1. Justifier la bonne définition de F sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit $x > 0$. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-t^2}} dt$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 : Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.

1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} . En déduire I_n en fonction de n et de I_1 .
2. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $I_n \sim I_1 \frac{k}{n^{\frac{3}{4}}}$. Nature de la série $\sum_n I_n$?

Exercice 12 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f(x) = o(\frac{1}{x})$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 13 :

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$
2. Que penser de l'égalité : $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$?
3. Montrer que $I = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} dx$.
4. Vérifier que pour tout $x \in [a, 2a]$, $\frac{e^{-2a}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{e^{-a}}{x}$.
5. En déduire la valeur de I .

Exercice 14 : Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

On suppose acquise la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ (voir exercice 4).

1. Soit $f:]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})}$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt$. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer $I_{n+1} - I_n$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n .
3. Soit g une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de I .