

TD 7 : Suites de fonctions

Exercice 1 : Convergence simple, convergence uniforme

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx} \end{cases}$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 : Convergence simple, convergence uniforme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^3 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$? Sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3 : Convergence simple, convergence uniforme

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4 : Convergence simple, convergence uniforme

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$

Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Convergence simple, convergence uniforme

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $f_n : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n \end{cases}$ Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$ en fonction des valeurs de α .

Exercice 6 : Convergence simple, convergence uniforme et continuité

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n : x \mapsto e^{-x^n}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
2. Etudier la convergence simple puis uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(0) = 1$ et $\forall x \in]0, \pi]$, $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x(1+nx)}$.

Exercice 7 : Intégration sur un segment d'une suite de fonctions

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$: $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$.

Exercice 8 : Théorème de convergence dominée

1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n dx \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + nx} dx$.
3. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^4)^n} dt$. Montrer l'existence de I_n et déterminer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 : Théorème de convergence dominée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{t}{n})}{t(1 + t^2)} dt$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ et un équivalent de I_n .

Exercice 10 : Calcul de limite

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t) dt$.

Exercice 11 : Autre expression de la constante d'Euler

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \frac{1}{t} dt \text{ et } J_n = \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} dt$$

A l'aide du théorème de convergence dominée montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

4. On rappelle que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge et que sa limite est appelée constante d'Euler et notée γ . Montrer que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt$$

Exercice 12 : Calcul de l'intégrale de Gauss

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{cases}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
3. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-k} dx$. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{k-1,n}$ et $I_{k,n}$ pour tout $k \geq 2$. Calculer $I_{1,n}$ et en déduire la valeur de $I_{n,n}$.
4. Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 13 :

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.
 - (a) Etudier la convergence simple de la suite $(F_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire sans démonstration supplémentaire que la suite $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.
 - (b) Soit $n \geq 3$. Calculer $F_n(0)$ et montrer que F_n admet une limite finie en $+\infty$. Tracer le tableau de variations de F_n .
 - (c) En déduire la convergence uniforme de la suite $(F_n)_n$ sur $[0, +\infty[$.