

EXERCICE 11

CORRIGE TD 7

$$1) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k$$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}, a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $\forall u \in [0, 1], \ln(1-u) \leq -u$ donc $\forall t \in [0, n], \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$

exp croissant donc $\forall t \in [0, n], e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t}$

donc $\forall t \in [0, n], 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

pour $t=n$ $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = 0 \leq e^{-n}$, l'inégalité est donc vérifiée.

$$2) \text{ Soit } t \in]0, 1]. \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t}$$

$$\text{donc } f_n(t) = \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \frac{1}{t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t} = f(t).$$

$(f_n)_n$ est une suite de fonctions CPM sur $]0, 1]$ qui cvs vers f et f est CPM (car continue) sur $]0, 1]$.

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1], 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \leq \frac{nt}{n} = t$$

car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \leq 1 \quad \forall k \in [0, n-1]$

$$\text{donc } 0 \leq f_n(t) \leq t \cdot \frac{1}{t} = 1$$

Or $\varphi: t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $]0, 1]$.

D'après le Th. de cv dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$, f aussi et

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

$$\text{Soit pour tout } n \in \mathbb{N}^*, g_n: t \mapsto \begin{cases} 1 & t \in [1, +\infty[\\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} & t \in [1, n] \end{cases}$$

g_n est continue de CPM sur $[1, +\infty[$.

Soit $t > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, t \leq n$ (prendre $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$)

$$\text{dc } \forall n \geq n_0, g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t}$$

Donc $(g_n)_n$ cvs sur $[1, +\infty[$ vers $g: t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ qui est bien continue de CPM.

$$\text{Or : } \forall t \in [1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(t)| \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

d'après 1).

$$\varphi: t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est bien continue et intégrable car } \frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t/2}) \text{ puisque } \frac{e^{-t/2}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par C.C.}$$

donc par th comparaison pour des fonctions intégrables

(utilisant une domination), $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ cv dc $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ cv dc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ cv

D'après le Th de CVD, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est intégrable, g aussi et $J_n = \int_1^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} dt$

$$= \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} g(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Or par Th. de changement de variables via $\varphi: [1, +\infty[\rightarrow]0, 1]$
 $t \mapsto 1/t$

qui est une bijection C^1 strictement décroissante,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 u e^{-1/u} \cdot \frac{1}{u^2} du = \int_0^1 \frac{e^{-1/u}}{u} du, \text{ ces intégrales}$$

étant de même nature et bien cv puisque g est intégrable.

$$3) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \quad I_n - J_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \frac{1}{t} dt - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} dt$$

$$\text{or } - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{t} dt = \int_1^n \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \frac{1}{t} dt \quad \text{par linéarité} \\ = \int_1^n \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \frac{1}{t} dt - \ln n.$$

$$\text{et } I_n - J_n = \int_0^n \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \frac{1}{t} dt - \ln n \text{ d'après la relation de Charles}$$

$$= \int_0^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k\right) \frac{1}{t} dt - \ln n \text{ d'après 1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt - \ln n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du - \ln n \text{ via le changement de variables} \\ \text{avec } \varphi:]0, n[\rightarrow]0, 1[\text{ bijection} \\ t \mapsto \frac{t}{n} \text{ } C^1 \text{ strictement} \\ \text{croissante}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 - \ln n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln n = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h} - \ln n$$

4) Par somme de limites,

$$I_n - J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt$$

$$\text{donc } \gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt \text{ par linéarité de l'intégrale}$$