

TD 8 : Topologie, limite et continuité d'applications entre des espaces vectoriels normés

Fondamentaux de base : EX 1 6. et 7., EX 2, EX 3, EX 4.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) EX 7, EX 8, EX 10, EX 11.

Exercice 1 : Ouverts, fermés, adhérence, intérieur

1. Soit A une partie non vide de E un espace vectoriel normé. Montrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.
2. Soit B une boule fermée ou ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ d'un espace vectoriel normé E . Montrer que l'intérieur de B est la boule ouverte de centre a et de rayon r . Montrer que l'adhérence de B est la boule fermée de centre a et de rayon r .
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue)? Justifier.
4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$ (muni du module)? Justifier.
5. Montrer que le produit cartésien de deux ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i \geq 6\}$. Montrer que F est fermé.
7. Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x + 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit $A_n = \{M = (m_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) / \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} \in [0, 1]\}$. Montrer que A_n est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Borne sup et inf d'une partie de $\mathbb{R}$ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $\sup A$ et $\inf A$ existent.
2. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont des points adhérents à A .
3. En déduire que si A est fermée, A admet de plus un maximum et un minimum.

Exercice 4 : Densité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit que A est dense dans E si et seulement si $\bar{A} = E$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ converge vers x .
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Suite de matrices

Pour tout $A \in M_2(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$. On rappelle (TD 5) que si T est triangulaire de la

forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N} : T^n = \begin{pmatrix} a^n & u_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ où $u_n = \begin{cases} c \frac{a^n - b^n}{a - b} & \text{si } a \neq b \\ nca^{n-1} & \text{si } a = b \end{cases}$.

Justifier que si $\rho(T) < 1$, $(T^n)_n$ converge vers la matrice nulle. En déduire que pour tout $A \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$, $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.

Exercice 6 : Continuité d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés et $u \in L(E, F)$

1. Montrer que : u est continue sur $E \Leftrightarrow u$ est continue en $0 \Leftrightarrow \exists C > 0, \|u(x)\| \leq C\|x\|$.
2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie et $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : pour tout $f \in E$, $u(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que u est linéaire et continue.

Exercice 7 : Utilisation des propriétés des fonctions continues

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $u \in L(E)$ et $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $\|u(x_0)\| = \sup_{x \in S} \|u(x)\|$.

Exercice 8 : Suite récurrente et point fixe d'une application contractante

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne telle que $k \in [0, 1[$. On note $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge alors : $\exists! a \in E, f(a) = a$.
2. Réciproquement on suppose que f admet un unique point fixe a . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : \|u_n - a\| \leq k^n \|u_0 - a\|$ puis en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers a .

Exercice 9 : On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose : $L(f)(x) = \int_0^1 (x+t)f(t)dt$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E .
2. Montrer que L est continue.
3. Déterminer $\|L\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

Exercice 10 : Déterminant d'une matrice par blocs (*)

Soit $(A, B, C, D) \in M_n(\mathbb{K})^4$ telles que et $DC = CD$. L'objectif est de montrer que :

$$(*) \left| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right| = \det(AD - CB)$$

1. On suppose D inversible. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$. En déduire l'égalité demandée dans le cas où D est inversible.
2. On suppose D non inversible. En examinant les zéros de la fonction $P : x \mapsto \det(D + xI_n)$, montrer qu'il $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.
3. En déduire que l'égalité (*) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Exercice 11 : Produit de convolution

On considère la suite de fonctions $(h_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2(x + \frac{1}{n}) & \text{si } -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ n^2(-x + \frac{1}{n}) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

On pose pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue :

$$f * h_n(x) = \int_{-1}^1 h_n(t)f(x-t)dt$$

1. En considérant la différence $f * h_n(x) - f(x)$, montrer que si f est lipschitzienne alors $(f * h_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .
2. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, $(f * h_n)_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.