

TD 9 : Séries de fonctions

Fondamentaux de base : EX 1, EX 3, EX 7, EX 8, EX 13.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) EX 14.

Exercice 1 : Différents types de convergence d'une série de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$.

1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est l'ensemble de définition de : $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$? f est-elle continue sur D ?

Exercice 2 : Différents types de convergence d'une série de fonctions

Soit pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Sur $[0, +\infty[$?
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : Différents types de convergence d'une série de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit f_n par : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$.

1. Montrer que $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Etudier la convergence normale de $\sum_n f_n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout segment de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Que peut-on en déduire concernant la convergence uniforme de $\sum_n f_n$?
4. Etudier la limite de la suite $\left(R_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n$. La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 4 : Différents types de convergence d'une série de fonctions

Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n \frac{x^n}{1+x}$ sur $\mathbb{R}^+$. Etudier sa convergence normale.

Exercice 5 : Continuité de la somme

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ définit une fonction continue sur $] -1, 1[$.

Exercice 6 : Convergence et somme

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_n f_n$ (on précisera les différents types de convergence) et calculer $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur son domaine de définition.

Exercice 7 : Caractère C^∞ de la somme d'une série de fonctions

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum_n f_n$ sur $\mathbb{R}$. On notera S la somme de $\sum_n f_n$ et on précisera son domaine de définition.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et expliciter l'expression de S' sans symbole de sommation.
3. Montrer que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Dédire de l'expression de S' l'expression de S sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 8 : Fonction Zéta de Riemann

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ de définition de ζ .
2. Montrer que ζ est continue sur D .
3. Montrer que ζ est de classe C^1 sur D .
4. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur D .
5. En utilisant la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ et une comparaison série-intégrale montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.
6. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x)$.

Exercice 9 : Utilisation du théorème spécial des séries alternées

Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est définie sur $[-1, 1]$, de classe C^1 sur $[-1, 1]$. Donner le sens de variations de f sur $[-1, 1]$.

Exercice 10 : Equivalent de la somme d'une série de fonctions

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_n f_n$ (convergence simple, uniforme, normale).

On note (lorsque cela a un sens) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de S en 0^+ .

Exercice 11 :

On pose pour tout $x > 0$ $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer S' .
2. Préciser le sens de variations de S .
3. Montrer que pour tout $x > 0$ $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
4. Déterminer un équivalent de S en 0 .

Exercice 12 : Intégration termes à termes sur un segment

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x))$ et $g(x) = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer e^{ix} en fonction de $f(x)$ et $g(x)$ puis montrer que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(x)} \cos(\sin(x) + nx) dx$ et $J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(x)} \cos(\sin(x) - nx) dx$.
Montrer que $I_n = 0$ et $J_n = 2\pi e$.

Exercice 13 : Expression d'une intégrale comme somme d'une série convergente

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. On pourra écrire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 14 : Application du théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\cos(x)}{e^x + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (S_n) définie par pour tout n : $t \mapsto S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Le théorème d'intégration termes à termes s'applique-t-il ?

Exercice 15 : Calcul d'une intégrale

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(\theta) = \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

1. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
2. Soit f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$. Montrer que S_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f'_x(\theta) = \frac{-x \sin(\theta)}{1 + x^2 - 2x \cos(\theta)}$.
3. En déduire une expression simplifiée de f_x . On pourra utiliser sans démonstration : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
4. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2) d\theta = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x^n \frac{\cos(n\theta)}{n} d\theta$. En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2) d\theta$ pour tout $x \in]-1, 1[$.