

TD 8 BIS

EXERCICE 14

$$1) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \text{ car } \underline{CD = DC}$$

$$\text{donc } \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \det D$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \stackrel{''}{=} \det(D) \times \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\det(D) \neq 0 \text{ donc } \underline{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)}$$

2) La fonction $P: x \mapsto \det(D + xI_n)$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à n .

Elle admet donc au plus n racines. 0 est racine car $\det D = 0$ (car $D \notin GL_n(K)$).

Si 0 est la seule racine, $p_0 = 1$ convient.

$$\forall p \geq 1, \det(D + \frac{1}{p}I_n) \neq 0 \text{ donc } D + \frac{1}{p}I_n \in GL_n(K).$$

Si P admet des racines non nulles, soit

$$\alpha = \min \{ |x| ; P(x) = 0 \}. \text{ (cet ensemble est fini et non vide)}$$

$$\text{Soit } p_0 = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor + 1,$$

$$\forall p \geq p_0, p \geq \frac{1}{\alpha} \text{ donc } \alpha > \frac{1}{p} \text{ donc } P(\frac{1}{p}) \neq 0$$

$$\text{donc } \det(D + \frac{1}{p}I_n) \neq 0 \text{ et } D + \frac{1}{p}I_n \in GL_n(K).$$

3) D'après 1),

$$\forall p \geq p_0, \begin{vmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{vmatrix} = \det(A(D + \frac{1}{p}I_n) - BC).$$

$$\text{or } D + \frac{1}{p}I_n \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} D.$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

L'application $M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ est linéaire donc continue car $M_n(K)$ est de dimension finie

$$\text{donc } A(D + \frac{1}{p}I_n) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} AD \text{ donc } A(D + \frac{1}{p}I_n) - BC \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} AD - BC$$

$\det$ étant continue (car par exemple polynômiale)

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \text{ et } \det(A(D + \frac{1}{p}I_n) - BC) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \det(AD - BC)$$

$$\text{On obtient donc } \underline{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)}$$