

TD 10 : TRIBUS - ESPACES PROBABILISES

Fondamentaux de base : EX 3, EX 4, EX 5, EX 6, EX 7, EX 8, EX 10.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) EX 9, 11.

Exercice 1 : Exemple de probabilité sur un univers non dénombrable.

Soit $\Omega = [0, 1]$, on suppose qu'il existe une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω contenant tous les segments $[a, b]$ avec $0 \leq a < b \leq 1$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ contient tous les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $0 \leq a < b \leq 1$.
2. Montrer que $\mathcal{T}$ contient tous les singletons $\{a\}$ avec $a \in [0, 1]$.
3. On suppose qu'on munit $(\Omega, \mathcal{T})$ d'une probabilité P telle que pour tout $(a, b) \in \Omega$ tel que $a < b$ on a $P([a, b]) = b - a$. Déterminer alors pour tout $(a, b) \in \Omega$ tel que $a < b$ $P(]a, b[)$ et $P(\{a\})$.

Exercice 2 : Masse de Dirac

Soit Ω un ensemble non vide et $a \in \Omega$ fixé.

Pour toute partie A de Ω , on pose $P(A) = 1$ si $a \in A$ et $P(A) = 0$ sinon.

Montrer que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 3 : Traduction ensembliste d'événements

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω , soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes les événements suivants :

1. "tous les événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont réalisés".
2. "aucun des événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est réalisé".
3. "au moins un des événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réalisé".
4. Soit B l'événement : "parmi les événements de la suite $(A_n)_n$ seul un nombre fini est réalisé". Justifier que $w \in B$ si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow w \in \overline{A_n}$. En déduire une expression de B en fonction des A_n et que B est bien un événement.
5. Soit C : "parmi les événements de la suite $(A_n)_n$, une infinité se réalisent". Montrer que C est un événement et en donner une expression en fonction des A_n .
6. Même question avec D : "tous les événements de la suite $(A_n)_n$ se réalisent sauf un nombre fini".

Exercice 4 : Probabilité sur $\mathbb{N}$

On suppose qu'il existe une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \frac{\lambda}{2^n}$. Déterminer la valeur de λ . On suppose dans la suite que λ est ainsi choisi.

Soit A l'ensemble des entiers naturels pairs et B l'ensemble des entiers naturels impairs, déterminer $P(A)$ et $P(B)$. A et B sont-ils indépendants ? Incompatibles ?

Exercice 5 : Dénombrement : différents tirages dans une urne

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1. **Tirages simultanés** On tire au hasard 2 boules. Expliciter pour cette expérience aléatoire l'univers et l'espace probabilisé choisi pour modéliser cette situation puis déterminer la probabilité de l'événement "les deux boules tirées portent des numéros de même parité".
2. **Tirages successifs sans remise** Même question si on tire une boule qu'on ne remet pas dans l'urne, puis qu'on tire une deuxième boule au hasard.
3. **Tirages successifs avec remise** Même question si on tire une boule de l'urne, qu'on la remet, puis qu'on effectue un deuxième tirage au hasard.

Exercice 6 : Utilisation des formules

Une urne contient n boules rouges et n boules bleues. On tire les boules de l'urne deux par deux.

Quelle est la probabilité p_n d'avoir à chaque tirage une boule bleue et une boule rouge ? Etudier la convergence de la suite $(p_n)_n$ et de la série $\sum_n p_n$.

Exercice 7 : Utilisation des formules

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne face avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On choisit une des pièces au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n -ième lancer. Montrer que la suite (p_n) est arithmético-géométrique.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n -ième lancer.

Exercice 8 : Utilisation des formules

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules bleues et trois boules jaunes et l'urne U_2 contient quatre boules bleues et trois boules jaunes. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- on choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie.
 - on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
 - si la boule tirée était bleue, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 , sinon il se fait dans l'urne U_2 .
- On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ B_n l'événement "la boule tirée au n -ième tirage est bleue" et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de p_n .

Exercice 9 : Succession d'épreuves de Bernouilli indépendantes

On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Soit A_n l'événement «aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement «le premier 6 est obtenu au k -ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
3. Soit K l'événement «6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n . En déduire $P(K)$.
4. Exprimer K en fonction des F_k . Retrouver la valeur de $P(K)$.
5. Soient G l'événement «6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

Exercice 10 : Chaîne de Markov

Dans une zone désertique un animal erre entre trois points d'eau A, B et C ; à l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note A_n (resp. (B_n, C_n)) l'événement " l'animal est au point A (resp. B, C) après son n -ième trajet" et $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n , c_n .
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer D diagonale et P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Expliquer comment utiliser la question précédente pour calculer a_n , b_n et c_n .

Exercice 11 : Lemme de Borel Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Démontrer que si la série $\sum_n P(A_n)$ converge alors $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_n) = 0$. En déduire que la probabilité qu'une infinité des A_n se réalise est nulle.