

EXERCICE 15

CORRIGÉ TD 9

1) Soit $x \in]-1, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\theta \mapsto x^n \cos(n\theta)$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(\theta)| \leq \frac{|x|^n}{1}$$

$$\text{donc } \|u_n\|_\infty \leq |x|^n \leq |x|^m$$

or la série $\sum |x|^n$ cv car $|x| < 1$.

dc par critère de majoration pr les SATP, $\sum_n \|u_n\|_\infty$ cv
dc $\sum_n u_n$ cvA sur $\mathbb{R}$ (dc cvA sur $\mathbb{R}$)

2) $\sum_n u_n$ cvs sur $\mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 car $\cos$ est C^1 et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, u'_n(\theta) = -x^n \sin(n\theta).$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |u'_n(\theta)| \leq |x|^n$$

$$\text{donc } \|u'_n\|_\infty \leq |x|^n. \text{ Or } \sum_n |x|^n \text{ cv car } |x| < 1$$

dc par Th. de comparaison pr les SATP, $\sum_n \|u'_n\|_\infty$ cv

dc $\sum_n u'_n$ cvA sur $\mathbb{R}$.

D'après le Th. de dérivation terme à terme, f_x est de classe C^1 et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f'_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} -x^n \sin(n\theta)$.

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (\frac{1}{n} e^{in\theta})$$

$$\text{or } \sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{i\theta})^n = \frac{x e^{i\theta}}{1 - x e^{i\theta}} = \frac{x e^{i\theta} - x^2}{(1 - x \cos \theta)^2 + x^2 \sin^2 \theta} = \frac{x e^{i\theta} - x^2}{1 + x^2 - 2x \cos \theta}$$

$$\text{donc } f'_x(\theta) = \frac{-x \sin \theta}{1 + x^2 - 2x \cos \theta}$$

$$3) f_x(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

f_x étant C^1 , par le Th. fondamental,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f_x(\theta) = -\ln(1-x) + \int_0^\theta f'_x(t) dt$$

$$\text{or } \int_0^\theta f'_x(t) dt = - \int_0^\theta \frac{x \sin t}{1 + x^2 - 2x \cos t} dt = - \frac{1}{2} [\ln(1 + x^2 - 2x \cos t)]_0^\theta$$

$$= \ln(1-x)^2 - \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta)$$

$$= \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta)$$

$$\text{finalement, } \forall \theta \in \mathbb{R}, f_x(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta)$$

$$4) \text{ donc } \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta) d\theta = -2 \int_{-\pi}^{\pi} f_x(\theta) d\theta$$

$$= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} d\theta$$

or la série $\sum_n u_n$ cvA sur $\mathbb{R}$ dc sur $[-\pi, \pi]$ et est une série de fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$.

D'après le Th. d'intégration terme à terme sur le segment $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+x^2 - 2x\cos\theta) d\theta = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} d\theta$$

$$\text{or } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} d\theta = \frac{x^n}{n} \left[\frac{1}{n} \sin(n\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

donc on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+x^2 - 2x\cos\theta) d\theta = 0$$