

TD de PROBABILITES

Exercice 1 : La ruine du joueur

Dans un casino, à chaque partie, un joueur a la probabilité $p \in]0, 1[$ de gagner un euro et la probabilité $aq = 1 - p$ de perdre un euro. Au départ, le joueur a une fortune de k euros, et il décide d'arrêter lorsqu'il a gagné la somme de N euros ou lorsqu'il est ruiné. On note p_k la probabilité que le joueur finisse ruiné.

1. Déterminer une relation entre p_{k-1} , p_k et p_{k+1} pour k compris entre 1 et $N - 1$.
2. Préciser p_0 et p_N et en déduire p_k en fonction de k et de N .
3. Le joueur oublie sa décision de s'arrêter dès qu'il possède N euros. Quelle est la probabilité qu'il finisse ruiné ? (on fera tendre N vers $+\infty$).

Exercice 2 :

On lance indéfiniment une pièce équilibrée et on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas trois PILE consécutifs au cours des n premiers lancers. On pose $p_0 = 1$.

1. Calculer p_1 , p_2 et p_3 .
2. Trouver une relation de récurrence entre p_n , p_{n-1} , p_{n-2} , p_{n-3} .
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 3 :

On lance indéfiniment une pièce qui donne PILE avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$. On appelle doublé le fait d'obtenir deux PILE de suite.

On introduit les événements suivants :

A_n : "on obtient au moins un doublé au cours des n premiers lancers"

B_n : "on obtient le premier doublé aux lancers $n - 1$ et n . On note $p_n = P(B_n)$.

1. Montrer que $P(A_n) = \sum_{k=1}^n p_k$ puis que $p_{n+3} = p^2 q (1 - \sum_{k=1}^n p_k)$.
2. En déduire une relation de récurrence entre p_{n+3} , p_{n+2} , p_{n+1} et p_n .
3. Déterminer p_n en fonction de n et la limite de p_n quand $n \rightarrow +\infty$. On pourra utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -pq^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.