

TD 10 : CORRIGES

Exercice 1 : Exemple de probabilité sur un univers non dénombrable.

1. Soient a, b tels que $0 \leq a < b \leq 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a + \frac{1}{n}$ et $b_n = b - \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_n$ est décroissante et converge vers a et la suite $(b_n)_n$ est croissante et converge vers b et on a donc $]a, b[= \cup_{n \in \mathbb{N}^*} [a_n, b_n]$ (se vérifie par double inclusion) ce qui montre que $]a, b[$ appartient à $\mathcal{T}$ puisqu'une tribu est stable par réunion dénombrable.
2. Soit $a \in [0, 1]$. De même, $\{a\} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} [a, a + \frac{1}{n}] \in \mathcal{T}$ puisque $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable.
3. En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [a_n, b_n]$, la suite $(A_n)_n$ est croissante pour l'inclusion d'après les sens de variations de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ donc par propriété de continuité croissante, $P([a, b]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = b - a$.

Par propriété de continuité décroissante, $P(\{a\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([a, a + \frac{1}{n}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exercice 9 : Succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes

SOLUTION. — On note B_i l'événement « Au i ème lancer on a un 6 ».

1. Les lancers sont indépendants : $P(A_n) = P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = P(\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_n}) = (\frac{5}{6})^n$.
2. On obtient, en invoquant l'indépendance des lancers ou la loi géométrique :

$$P(F_k) = P(A_{k-1} \cap B_k) = P(A_{k-1})P(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

3. On trouve $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, et les (A_n) formant une suite décroissante. Par le théorème de continuité décroissante

$$P(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0.$$

4. On a aussi $K = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{F_k} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k}$. La réunion étant disjointe, $P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{5}{6})^{k-1} \frac{1}{6} = 1$. On retrouve la valeur

$$P(K) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = 0.$$

5. (a) Soit G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois ». Son contraire est : « 6 apparaît un nombre fini de fois », ou encore « à partir d'un certain rang, on n'a plus de 6 », soit :

$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}.$$

Si on note $C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}$, les (C_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante on a donc $P(\overline{G}) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n)$. Mais pour tout $N \geq n$, $P(C_n) \leq P(\cap_{k=n}^N \overline{B_k}) = \prod_{k=n}^N P(\overline{B_k})$ par indépendance des lancers, donc $P(C_n) \leq (\frac{5}{6})^{N-n+1}$, donc $P(C_n) = 0$. Alors $P(\overline{G}) = 0$ donc $P(G) = 1$.

- (b) Soit H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux», ou encore «à partir d'un certain rang, on n'a plus que des 6», soit

$$H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} B_k.$$

Si on pose $D_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} B_k$, les (D_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante, on a donc $P(H) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n)$. Mais pour tout $N \geq n$, $P(D_n) \leq P(\bigcap_{k=n}^N B_k) = \prod_{k=n}^N P(B_k)$ par indépendance des lancers, donc $P(D_n) \leq (\frac{1}{6})^{N-n+1}$, donc $P(D_n) = 0$. Finalement,

$$P(H) = 0.$$

Exercice 11 :

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ ce qui définit une suite décroissante d'événements. Par théorème de continuité décroissante, $P(B_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n)$. Or par propriété de sous-additivité, $P(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ qui est le reste d'ordre $n - 1$ d'une série convergente par hypothèse, donc tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, $P(B_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = 0$.