

TD 11 : VARIABLES ALEATOIRES 1

Fondamentaux de base : EX 1, EX 5, EX 8.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) EX 12.

Exercice 1 : Lois usuelles

Dans chaque situation, reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire X en précisant les paramètres éventuels :

1. On lance un dé équilibré à 6 faces, X est le nombre obtenu.
2. Une urne contient 4 boules bleues, 3 boules vertes et 2 boules rouges, on tire au hasard successivement et avec remise 5 boules de l'urne, X est égale au nombre de boules bleues obtenues.
3. Une urne contient 4 boules bleues, 3 boules vertes et 2 boules rouges, on tire au hasard successivement et avec remise 1 boule de l'urne jusqu'à obtenir une boule bleue, X est égale au nombre de tirages effectués.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2 + 1$

1. Déterminer l'espérance de Y .
2. Quelle est la probabilité de l'évènement $[2X < Y]$?
3. Comparer les probabilités que X soit paire et que X soit impaire.

Exercice 3 :

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 4 : Soit $p \in]0; 1[$. On note $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X . Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
3. Que représente la variable aléatoire $Y = Z - X$? Déterminer la loi de Y .

Exercice 5 : Loi de Rademacher

On appelle variable aléatoire de Rademacher une variable aléatoire réelle X telle que $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires de Rademacher indépendantes et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Déterminer la loi de S_n .

Exercice 6 : Soit $n \geq 2$. On considère une urne contenant : k boules numérotées k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. On tire une boule dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.

Déterminer la loi de X et son espérance.

2. On effectue maintenant 2 tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note X_1 (resp. X_2) le numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée.

- a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .
- b. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 : 1. Soient X et Y deux v.a. indépendantes définies sur le même espace de probabilité telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de XY .

2. Soient U et V deux v.a. indépendantes définies sur le même espace de probabilité suivant toutes les deux la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer les probabilités $P(U = V)$, $P(U \geq V)$.

b. Déterminer la loi de $Z = \max(U, V)$.

c. Déterminer la loi de $U + V$.

Exercice 8 : Poissonisation

On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule égale à $p \in]0, 1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Soient $s, n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(S = s \mid N = n)$ et $P(S = s \text{ et } N = n)$. En déduire la loi de S .

2. Donner la loi de $N - S$ sans calcul.

3. Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?

4. Même question pour S et N .

Exercice 9 : Rang d'apparition d'une boule

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n - 1$ boules noires et 1 boule blanche. On effectue des tirages sans remise et on note X le rang de sortie de la boule blanche. Déterminer la loi de $E(X)$.

Exercice 10 : Maximum

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\max\{X, Y\}$.

Exercice 11 : Matrice aléatoire

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre

$p \in]0, 1[$ et $S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ et λ et μ ses valeurs propres.

1. Calculer λ et μ en fonction de X et Y .

2. Vérifier que S est presque sûrement diagonalisable.

3. Calculer la probabilité que S soit inversible.

Exercice 12 : Chaîne de Markov

On considère une suite de n convertisseurs numériques fonctionnant de manière indépendante et placés en série. Chaque convertisseur restitue correctement le bit qu'on lui fournit avec la probabilité p et renvoie le bit opposé avec la probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$. On note X_k le bit en sortie du k -ième convertisseur, X_0 le bit en entrée de chaîne. On pose

$$A_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 0) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation entre A_k et A_{k+1} .

2. En déduire la probabilité que le bit initial soit correctement rendu en sortie du n -ième convertisseur. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?