

EXERCICE 1

- 1) On note B : "le joueur perd la 1^{ère} partie", $P(B) = q$, $P(\bar{B}) = p$.
et on applique la FPT au SCE $\{B, \bar{B}\}$.
Soit $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

$$P(E_k) = P(B) P_B(E_k) + P(\bar{B}) P_{\bar{B}}(E_k)$$

en notant E_k : "le joueur finit ruiné en partant d'une fortune de k euros".

Si B est réalisé, c'est comme si le joueur partait de $k-1$ euros. donc $P_B(E_k) = p_{k-1}$
de même $P_{\bar{B}}(E_k) = p_{k+1}$

$$\text{donc } p_k = q \cdot p_{k-1} + p \cdot p_{k+1}$$

- 2) $p_0 = 1$ puisque le joueur est déjà ruiné avant de jouer
 $p_N = 0$: s'il a N euros, il ne joue pas.

$(p_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ satisfie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

d'équation caractéristique $pn^2 - n + q = 0 \Leftrightarrow pn^2 - n + 1 - p = 0$
 $\Leftrightarrow p(n-1)(n - \frac{q}{p}) = 0$

$\rightarrow$ si $p \neq \frac{1}{2}$, $p \neq q$ donc $a = \frac{q}{p} \neq 1$

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p_k = \lambda + \mu a^k$$

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_N = 0 \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu a^N = 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda = \frac{a^N}{a^N - 1} \text{ et } \mu = \frac{1}{1 - a^N}$$

$$\text{donc } \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p_k = \frac{a^k - a^N}{1 - a^N}$$

$\rightarrow$ si $p = q = \frac{1}{2}$, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p_k = (\lambda + \mu k) a^k$ où $a = 1$

on trouve $\lambda = 1$ et $\mu = -\frac{1}{N}$ donc $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p_k = 1 - \frac{k}{N}$

- 3) On fait $N \rightarrow +\infty$.

$\rightarrow$ si $p < q$, c'est $a > 1$ (le jeu est défavorable au joueur)
 $p_k \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1$, le joueur est presque sûrement ruiné

$\rightarrow$ si $p = q = \frac{1}{2}$, $p_k \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1$, " " " "

$\rightarrow$ si $p > q$ c'est $a < 1$ (le jeu est favorable au joueur)
 $p_k \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} a^k$

la probabilité que le joueur se ruine est une fonction décroissante de sa fortune initiale k .

EXERCICE 2

$$p_0 = 1$$

1) $p_1 = \frac{1}{2} = p_2$ On note P_i : "on obtient PILE au i^{e} lancer" (resp. F_i FACE)
et A_i : "on obtient 3 PILE consécutifs au cours des i 1^{ers} lancers"
 $A_3 = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ donc $p_3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $p_i = P(A_i)$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Soit } n \geq 3. \quad \bar{A}_n &= (\bar{A}_n \cap P_1) \cup (\bar{A}_n \cap F_1) \\ &= (\bar{A}_n \cap F_1) \cup (\bar{A}_n \cap P_1 \cap F_2) \cup (\bar{A}_n \cap P_1 \cap P_2) \\ &= (\bar{A}_n \cap F_1) \cup (\bar{A}_n \cap P_1 \cap F_2) \cup (\bar{A}_n \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (\bar{A}_n \cap P_1 \cap P_2 \cap F_3) \end{aligned}$$

$$\text{or } P(\bar{A}_n \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3) = 0$$

$$P(\bar{A}_n \cap F_1) = P(F_1 | \bar{A}_n) P(F_1) = \frac{1}{2} P(\bar{A}_{n-1}) = \frac{p_{n-1}}{2}$$

$$P(\bar{A}_n \cap P_1 \cap F_2) = P_{P_1 \cap F_2}(\bar{A}_n) P(P_1) P(F_2) = \frac{1}{4} p_{n-2} \quad \text{par indépendance des lancers.}$$

$$P(\bar{A}_n \cap P_1 \cap P_2 \cap F_3) = \frac{1}{8} p_{n-3} \quad \text{de même}$$

en effet si F_i réalisée, la réalisation de $\bar{A}_n$ revient à ne pas obtenir 3 PILE consécutifs au cours des $n-1$ lancers de 2 à n .

donc par additivité
$$p_n = \frac{p_{n-1}}{2} + \frac{p_{n-2}}{4} + \frac{p_{n-3}}{8}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\bar{A}_{n+1} \subset \bar{A}_n$ donc $(p_n)_n$ est décroissante
et $(p_n)_n$ minorée par 0 donc converge.

$$\text{On note } l \text{ sa limite : } l = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{8}$$

$$\text{donne } \frac{7}{8} l = 0 \text{ donc } l = 0 \text{ de } p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On obtient donc presque sûrement 3 PILE consécutifs.

EXERCICE 3

1) on a $A_n = \bigcup_{h=2}^n B_h$ pour tout $n \geq 2$ et les B_h sont deux à deux incompatibles donc par additivité, $P(A_n) = \sum_{h=1}^n P(B_h)$ ($P_1 = 0$). donc $P(A_n) = \sum_{h=1}^n p_h$.

On note P_i : "on obtient PILE au i^e lancer".

$$B_{n+3} = P_{n+3} \cap P_{n+2} \cap \overline{P_{n+1}} \cap \overline{A_n}$$

par indépendance des lancers :

$$P_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{h=1}^n p_h\right)$$

ce qui donne

$$2) \text{ donc } p_{n+2} = p^2 q \left(1 - \sum_{h=1}^{n-1} p_h\right)$$

$$p_{n+3} - p_{n+2} = -p^2 q p_n$$

$$\text{donc } p_{n+3} - p_{n+2} + p^2 q p_n = 0.$$

$$3) \text{ On pose } X_n = \begin{pmatrix} p_{n+2} \\ p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} \quad X_{n+1} = A X_n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -pq^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc par récurrence } X_n = A^n X_A.$$

$$X_A = X^2(X-1) + pq^2 = X^3 - X^2 + q^2 - q^3 \quad \text{car } p = 1-q$$

$$= (X-q)(X^2 + (q-1)X + q(q-1)) \quad (q \text{ racine évidente})$$

$$X_A \text{ admet 3 racines distinctes } \lambda_1 = q, \lambda_2 = \frac{1-q + \sqrt{(1-q)(1+3q)}}{2}$$

$$\text{et } \lambda_3 = \frac{1-q - \sqrt{(1-q)(1+3q)}}{2}$$

donc A est diagonalisable : $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = P \cdot D \cdot P^{-1}$
où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \text{ par récurrence.}$$

$$\text{or } \lambda_1 \in]0, 1[, (1+3q)(1-q) \in]0, 4[\text{ donc } \lambda_3 \in]-\frac{1}{2}, 1[$$

$$\text{et } \lambda_2 \in]0, 3/2[. \quad \text{donc } \lambda_1^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \lambda_3^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{il reste à vérifier } 0 < \lambda_2 < 1 \text{ pour } \lambda_2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{alors } D^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et par continuité de l'application}$$

linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ sur $M_3(\mathbb{R})$ de dimension finie,

$$A^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc } X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{par continuité de}$$

$$\text{donc } p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$M \mapsto MX$, de même)