

TD 11 : VARIABLES ALEATOIRES 1 : CORRIGES

Exercice 8 :

1. — En supposant les éventuelles détections des particules indépendantes les unes des autres, la loi conditionnelle de S sachant $\{N = n\}$ est la loi $\mathcal{B}(n, p)$, donc $P(S = s | N = n) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$ (avec $\binom{n}{s} = 0$ si $s > n$).
- On en déduit

$$P(S = s, N = n) = P(N = n)P(S = s | N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Notons que cette quantité vaut 0 si $n < s$, et vaut $\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^s}{s!} \times \frac{(\lambda(1-p))^{n-s}}{(n-s)!}$ si $n \geq s$.

- Par formule des probabilités totales,

$$P(S = s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = s, N = n) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^s}{s!} \sum_{n=s}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-s}}{(n-s)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^s}{s!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^s}{s!}.$$

On voit donc que S suit la loi de Poisson de paramètre λp .

2. La variable $T = N - S$ est le nombre de particules qui n'ont pas été détectées. Le raisonnement de (a) en remplaçant p par $1-p$ montre alors que T suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.
3. Soient $s, t \in \mathbb{N}$. Avec la notation $T = N - S$, on a $\{S = s, T = t\} = \{S = s, N = s + t\}$, donc par le 2e point de (a),

$$\begin{aligned} P(S = s, T = t) &= P(S = s, N = s + t) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^s}{s!} \times \frac{(\lambda(1-p))^t}{t!} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^s}{s!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^t}{t!} = P(S = s)P(T = t), \end{aligned}$$

donc les variables S et $T = N - S$ sont indépendantes.

4. Pour $s > n$, on a $P(S = s, N = n) = 0 \neq P(S = s)P(N = n)$, donc les variables S et N ne sont pas indépendantes.

Exercice 11 :

1. On trouve deux valeurs propres $\lambda = X + Y$ et $\mu = X - Y$.
2. $P(X + Y = X - Y) = P(Y = 0) = 0$ donc S a presque sûrement deux valeurs propres distinctes donc est presque sûrement diagonalisable.
3. On rappelle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on note $q = 1 - p$. $P(S \text{ inversible}) = P(X + Y \neq 0 \text{ et } X - Y \neq 0) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)$ Donc $P(S \text{ inversible}) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = 1 - \frac{p^2}{1 - q^2} = 1 - \frac{p}{2 - p} = 2q$