

TD 12 : SERIES ENTIERES

Fondamentaux de base : EX 2, EX 3, EX 8, EX 10, EX 13.

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) EX 6, EX 11, EX 12, EX 15.

Exercice 1 :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n^2 x^n$ et de $\sum_n a_n x^{2n}$.

Exercice 2 : Rayons de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \sqrt{n} 2^n z^n$
2. $\sum_n e^{i\sqrt{n^2+n+1}} z^n$
3. $\sum_n \operatorname{ch}(n) z^n$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} z^{2n}$
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^n + n} z^{4n}$
6. $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$
7. $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 - 8}{2^n + n} z^n$
9. $\sum_n \binom{2n}{n} z^n$
10. $\sum_n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right) z^n$

Exercice 3 : Rayon de convergence et calcul de somme

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de la variable réelle :

1. $\sum_{n \geq 0} n x^n$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$
3. $\sum_n \frac{x^n \cos(n\theta)}{n!}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$
5. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k.k! \right) x^n$

Exercice 4 : Calcul de la somme d'une série numérique

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n 2^n}$ convergent et calculer leurs sommes.

Exercice 5 :

On définit la suite $(u_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$.

1. Vérifier la convergence de la série $\sum u_n$.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.
3. Déterminer un équivalent de a_n . En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Exercice 6 : Etude de la somme d'une série entière

Soit la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence R puis étudier la convergence en $-R$ et R .
2. En notant S sa somme, étudier la continuité de S .
3. Montrer que $(1-x)S(x) \rightarrow_{x \rightarrow 1} 0$.

Exercice 7 : Nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Soit X un ensemble fini. On dit que $f: X \rightarrow X$ est une involution de X si $f \circ f = \operatorname{id}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

1. Calculer I_1, I_2, I_3 .

3. Soit $S: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} z^n$. Montrer que S a un rayon de convergence $R \geq 1$.

4. Soit $x \in]-R, R[$. Calculer $(1+x)S(x)$ et en déduire une expression simple de $S(x)$. En déduire enfin une expression de I_n sous forme d'une somme.

Exercice 8 : Développements en série entière

Déterminer le développement en série entière sur des intervalles $] -r, r[$ à préciser des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto (1+x) \ln(1+x) \quad 2. x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad 3. x \mapsto \frac{1}{(3-x)(2-x)} \quad 4. x \mapsto e^x \cos(x)$$

Exercice 10 : Utilisation des propriétés des séries entières

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(0) = 1$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)$.

Exercice 11 : Développement en série entière pour une fonction définie par une intégrale

Montrer que la fonction $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ est développable en série entière, déterminer son développement et le rayon de convergence.

Exercice 12 : Développement en série entière

Soit f définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrer que f est développable en série entière et déterminer ce développement.

Exercice 13 : Utilisation d'une équation différentielle

Soit f définie sur $] -1, 1[$ par $f: x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier sans calculs que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que f est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle : $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire le développement en série entière de f .

Exercice 14 : Equivalent

Soient les séries entières $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$, on note respectivement f et h leurs sommes.

1. Déterminer leur rayon de convergence commun R puis montrer que pour tout $x \in [0, R[$: $h(x) \leq (1-x)f(x) \leq x + xh(x)$.
2. Trouver un équivalent simple de $h(x)$ quand $x \rightarrow 1$. On rappelle que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1$.

Exercice 15 : Formule de Cauchy

1. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

Montrer que pour tout $r \in]0, R[$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) re^{it}}{re^{it} - z} dt$. Que se passe-t-il si $|z| > r$?