

TD 13 : VARIABLES ALEATOIRES II

Fondamentaux de base : EX 3, 4, 6, 10, EX 14, EX 15 .

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) : EX 9, EX 13 .

Exercice 1 : Plus grand numéro tiré lors d'un tirage simultané

On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N .

On note X le plus grand numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X .

2. En déduire que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$ (formule de Pascal généralisée).

3. Déterminer l'espérance de X .

Exercice 2 : Théorème de transfert

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

2. Soit une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E(X - \lambda)$ puis $E(|X - \lambda|)$.

Exercice 3 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Une puce se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ en partant de 0. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité qu'elle fasse un saut à droite, $q = 1 - p$ la probabilité qu'elle fasse un saut à gauche. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse au bout de n déplacements. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 4 : Maximum de n variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique

Soient $p \in]0, 1]$ et $q = 1 - p$. Soient $X_1, X_2, \dots, X_N$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p

1. Calculer $P(X_i \leq n)$.

2. Soit $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$. Calculer $P(Y \leq n)$; en déduire $P(Y = n)$.

3. Montrer que Y admet une espérance finie.

Exercice 5 : Minimum de 2 va suivant une loi uniforme

Soient X_n et Y_n deux variables aléatoires suivant des lois uniformes sur $\{1, \dots, n\}$ et indépendantes. On pose $Z_n = |X_n - Y_n|$ et $T_n = \min\{X_n, Y_n\}$. Calculer $E(Z_n)$ et $E(T_n)$. Déterminer des équivalents de $E(Z_n)$ et $E(T_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 : Loi géométrique

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$.

1. Calculer $P(Y = 0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q}$. En déduire la loi de Y .

2. Montrer que Y admet une espérance finie et la calculer.

3. Montrer que $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Y admet une variance et la calculer.

Exercice 7 : Calcul d'espérance

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Montrer que la suite $(P(X \geq n))$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire la loi de X .
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

Exercice 8 : Temps d'attente du n -ième succès

On effectue une série d'expériences de Bernoulli, la probabilité de succès étant $p \in]0, 1[$. On se place dans l'univers $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qu'on munit d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une probabilité P rendant les lancers mutuellement indépendants. On note T_n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le n -ième succès.

1. Identifier la loi de T_1 .
2. Déterminer la loi de T_2 puis de T_n pour n quelconque.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in T_n(\Omega)$, déterminer la loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $T_n = k$. En déduire la loi de $T_{n+1} - T_n$.
4. Déterminer $E(T_n)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $T_{n+1} - T_n$ et T_n sont indépendantes. En déduire $V(T_n)$.
6. En utilisant l'indépendance de $T_{n+1} - T_n$ et T_n calculer la fonction génératrice de T_n . En déduire la "formule du binôme négatif" :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}$$

Exercice 9 : Utilisation de la formule du binôme négatif

Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, le premier rayon laser étant envoyé à $t=1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser et les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée $r+1$ fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que X admet une espérance finie et la calculer.

Exercice 10 : Calcul de covariance

Une urne contient $2n$ boules de couleurs différentes, n boules sont numérotées 0 et les autres boules sont numérotées de 1 à n . On prend une poignée de n boules dans l'urne. Si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée k est dans la poignée et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de U_k . Donner son espérance et sa variance, puis calculer $cov(U_i, U_j)$ pour $i \neq j$.
2. Soit $N = U_1 + \dots + U_n$. Que représente N ? Calculer l'espérance et la variance de N .
3. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules présentes dans la poignée. Exprimer S en fonction des U_k .
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 présentes dans la poignée. Donner une expression de Z . Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 11 : Loi de Pascal

On note $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la suite de réels définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle loi de Pascal de paramètre (n, p) .
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi ci-dessus. Déterminer la série génératrice de X , en déduire qu'elle admet une espérance et une variance. Les calculer.
3. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent deux lois de Pascal de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) . Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 12 : Séries génératrices :

Soit X une variable aléatoire. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que $Y + Z$ ait la même loi que X .

1. Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z .
2. Soient $n \geq 2$ et $p \in]0, 1[$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, montrer que X est décomposable.
3. Soit $n \geq 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} t^i)(\frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} t^j)$. En déduire que X est décomposable.

Exercice 13 : Transformée de Laplace :

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ on appelle transformée de Laplace de X (ou fonction génératrice des moments) la fonction $\mathcal{L}_X$ définie par :

$$t \mapsto \mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{L}_X$ est toujours définie en 0.
(b) Calculer $\mathcal{L}_X$ dans les cas suivants :
(a) $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ (b) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (c) $X \sim \mathcal{G}(p)$ (d) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
On précisera à chaque fois son ensemble de définition.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle et $t > 0$ telle que e^{tX} admet une espérance alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, P(X \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tX})$$

Exercice 14 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 15 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On effectue des tirages successifs et indépendants d'une pièce équilibrée. Soit X_n le nombre de face obtenus lors des n premiers lancers. Déterminer n tel que $P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{100}) \geq 0,99$.

Exercice 16 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2) \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. A-t-on toujours $P(|X_1 + \dots + X_n| \geq n\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 17 : CCINP PSI 2025

Soit x une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. (a) Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

(b) En déduire (1) : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

2. On pose $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$.

(a) Justifier que G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

(b) Montrer que : $\forall t \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$.

(c) En déduire (2) : $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\alpha$.

(d) On admet que $e(\ln(4) - 1) \geq 1.05$. Quelle majoration (1) ou (2) est la plus précise ?