

TD 14 : INTEGRALES A PARAMETRES

Fondamentaux de base : **EX 1, 2, 3, 5, 6** .

Grands classiques d'approfondissement et/ou méthodes à retenir : (*) : **EX 7, 8, 9, 10, 11** .

Exercice 1 : Exemples

1. Montrer que la fonction : $F : x \mapsto \int_0^1 \cos(xt)dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction : $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que la fonction : $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+x^2} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Exemple

Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$. Donner le domaine de définition de g , montrer qu'elle y est de classe C^1 et calculer g' . En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 3 : Fonction Gamma

On note : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de Γ et vérifier qu'elle y est continue. Rappeler le domaine de définition de ζ .
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur D .
3. Montrer que pour tout $x > 1$: $\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

Exercice 4 : Exemple

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{t+1} dt$.

1. Trouver le domaine de définition D de f .
2. Étudier la continuité de f .
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in D$.
4. En déduire une expression de f sous forme d'une série de fonctions.

Exercice 5 : Utilisation d'une équation différentielle

Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tx) dt$.

1. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par g .
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

Exercice 6 : Intégrale de Gauss

On définit deux fonctions f et g par : $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$ puis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^{-x^2} g(x)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) + (g(x))^2 = \frac{\pi}{4}$.
3. Retrouver que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer $F'(t)$. En déduire une expression de $F(t)$ sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que F est continue en 0. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dx$.

Exercice 8 : Produit de convolution

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

1. Montrer que la formule précédente définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.
2. Montrer que $f * g = g * f$.
3. On suppose de plus que g est de classe C^1 et que g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe C^1 et que $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 9 : Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt$

1. Montrer que $\hat{f}$ définit une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus f de classe C^1 et f' intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de limite nulle en $-\infty$ et en $+\infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(x) = ix\hat{f}(x)$ puis que $\hat{f}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
3. On suppose $g : x \mapsto xf(x)$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x)$.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Calculer $\hat{f}$.
5. On pose $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t^2}$.
 - (a) Justifier que $\hat{f}$ est de classe C^1 et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\hat{f})'(x) = -\frac{x}{2}\hat{f}(x)$.
 - (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Exercice 10 : Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$. Lf est appelée transformée de Laplace de f .

1. On suppose que f est bornée. Montrer que Lf définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Lf(x) = 0$.
3. Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ et . Calculer la transformée de Laplace de $f_n : t \mapsto t^n e^{at}$.

Exercice 11 : Fonction J_0 de Bessel

Soit J_0 définie par : $x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$. Montrer que J_0 est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont J_0 est solution.

Exercice 12 :

Existence et calcul s'il y a lieu de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$, avec $x \in \mathbb{R}$.