

Ex 11

1) $f: (x, t) \mapsto \cos(x \sin t)$

$\forall t \in [0, \pi]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est C^0 et intégrable sur $[0, \pi]$

et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin t \sin(x \sin t)$ aussi

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq |-\sin^2 t \cos(x \sin t)| \leq 1 = \varphi(t)$
de par Th., J_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. où $\varphi \in L^1([0, \pi])$

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_0'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin(x \sin t) dt$$

$$J_0''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \cos(x \sin t) dt$$

$$J_0'(x) = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\cos t \sin(x \sin t)}_{=0} \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos t \cos(x \sin t) dt \quad \text{par IPP}$$

$$\text{donc } J_0'(x) + x J_0''(x) = -\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt = -x J_0(x)$$

donc J_0 est solution sur $\mathbb{R}$ de : $xy'' + y' + xy = 0$. (E)

2) $\forall x \in]0, \pi[$, $J_0'(x) < 0$ donc J_0 est strictement décroissante

$J_0(0) = 1 > 0$. Il suffit de mg $J_0(\pi) < 0$ et d'après le corollaire du Th1, on aura $\exists x \in]0, \pi[, J_0(x) = 0$.

On peut mg J_0 est l'unique solution DSE de (E) tq $y(0) = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\text{où } \forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \pi$$

Ex 12 $f(x, t) = \frac{e^{int} - 1}{t} e^{-t}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto f(x, t) \in C^0$ sur $\mathbb{R}^+$

$f(x, t) \sim \frac{1}{t^2}$ dc $t f(x, t)$ intégrable en $+\infty$ par comparaison

$\frac{e^{int} - 1}{t} \sim in$ ($= \psi(t) - \psi(0)$ où $\psi: t \mapsto e^{int}$ dérivable en 0)

dc $t \mapsto f(x, t)$ prolongeable par continuité en 0
dc $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{int} - 1}{t} e^{-t} dt$ définie sur $\mathbb{R}$ ($t f(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$)

$\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x, t) \in C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = i e^{(in-1)t}$ CPM

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-t} = \psi(t), \psi \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

dc $F \in C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = i \int_0^{+\infty} e^{(in-1)t} dt$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \left[\frac{i e^{(in-1)t}}{in-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{i}{1-in} = \frac{i-x}{1+x^2}$$

$$F(0) = 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{i}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$$

$$\text{dc } F(x) = i \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$