

TD : CCINP PSI 2024

PROBLEME :

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Les matrices J_λ , dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan. On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k tel que $M^k = 0$ est appelé l'indice de nilpotence de M .

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

On note $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$, on définit :

$$\mathcal{N}(A) = \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^p |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

On admet que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes respectivement sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et E .

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ .

1. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et en déduire J_0^2 .
Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p . En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p .
2. Montrer que $\text{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0 .

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ , de dimension $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On note ν l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ une base de V , que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

1. Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$?
2. En déduire que le polynôme caractéristique de ν divise le polynôme caractéristique de u_λ et que $e_p \in V$.
3. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X.$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

1. Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ , alors $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S) .
2. On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$.

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$.

3. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.

4. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda) X(t)$ est constante.

En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda) X_0$ où $X_0 \in E$.

5. Montrer que si $\lambda > 0$, (S) admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$, on a $\|AX\| \leq \mathcal{N}(A) \|X\|$.
En déduire que si $\lambda < 0$, toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
7. Que dire concernant l'existence de solutions de (S) non bornées sur $\mathbb{R}_+$ si $\lambda = 0$?