

TD : CCINP PSI 2024 : CORRIGE

PROBLEME :

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Q.30 On a $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc $\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, & u_0(e_j) = e_{j+1} \\ & u_0(e_p) = 0 \end{cases}, \text{ puis } \begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket, & u_0(e_j) = e_{j+2} \\ & u_0(e_p) = 0 \\ & u_0(e_{p-1}) = 0 \end{cases}.$

Ainsi $J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

De manière analogue :

$$J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_0^p = 0_p.$$

On en déduit donc que J_0 est nilpotente d'indice p .

Q31. J_λ est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Et u_λ et J_λ ont même spectre donc

$$Sp(u_\lambda) = \{\lambda\}.$$

De plus $J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ et le rang de J_0 vaut $p-1$ donc, par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(J_\lambda - \lambda I_p)) = p - (p-1) = 1.$$

Il est clair que e_p est un vecteur non nul tel que $u_\lambda(e_p) = \lambda e_p$ donc

Le sous espace propre de u_λ associé à λ est $\text{Vect}(e_p)$.

Q32. On remarque que : $u_\lambda = u_0 + \lambda Id_{\mathbb{R}^p}$, donc $\forall X \in E, \quad u_\lambda(X) = u_0(X) + \lambda X$.
Soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

— Supposons V stable par u_λ . On a alors

$$\forall X \in V, \quad u_0(X) = \underbrace{u_\lambda(X)}_{\in V} - \underbrace{\lambda X}_{\in V} \quad \text{donc} \quad u_0(X) \in V.$$

- On montre de même que si V est stable par u_0 alors V est stable par u_λ .
- Conclusion : V est stable par u_λ si et seulement si V est stable par u_0 .

Q33. La matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est une matrice par blocs de la forme :

$$W = \begin{pmatrix} A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) & B \in \mathcal{M}_{p-k,k}(\mathbb{R}) \\ 0 \in \mathcal{M}_{k,p-k}(\mathbb{R}) & D \in \mathcal{M}_{p-k,p-k}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de v dans la base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$.

Q34. Notons P le polynôme caractéristique de u_λ et Q celui de v . On a pour tout réel x

$$P(x) = \det(xI_p - W) = \det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ 0 & xI_{p-k} - D \end{pmatrix} = \det(xI_k - A) \times \det(xI_{p-k} - D) = Q(x) \times R(x).$$

Or $\det(xI_k - A) = Q(x)$ et R est un polynôme.

Donc $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } v \text{ divise celui de } u_\lambda.}$

On en déduit que $Sp(v) = \{\lambda\}$. Si X est un vecteur propre de v associé à λ alors $X \in V$ et $v(X) = \lambda X$ donc $u_\lambda(X) = \lambda X$ donc X est un vecteur propre de u_λ associé à λ . Et comme l'espace propre de u_λ associé à λ est de dimension 1 engendré par e_p , $X \in Vect(e_p)$. Puisque X est non nul, nécessairement

$$\boxed{e_p \in V}$$

Q35. Supposons par l'absurde qu'il existe deux sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^p$, stables par u_λ , non réduits à $\{0\}$ et tels que $V \oplus W = \mathbb{R}^p$.

Comme ces sous espaces sont non nuls, d'après **Q34.**, ils contiennent tous deux e_p et cela contredit le fait qu'ils soient en somme directe.

$\boxed{\text{Il n'existe pas de sous espaces vectoriels } V \text{ et } W \text{ de } \mathbb{R}^p, \text{ stables par } u_\lambda, \text{ non réduits à } \{0\} \text{ et tels que } V \oplus W = \mathbb{R}^p.}$

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

Q36. Par hypothèse X_0 est un vecteur non nul tel que $J_\lambda X_0 = \lambda X_0$.

La fonction $\tilde{X}$ est bien de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_0 = e^{\lambda t} \lambda X_0 = e^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda \tilde{X}(t).$$

$\boxed{\text{Donc } \tilde{X} \text{ est solution particulière de } (S).}$

Q37. Par opérations sur les fonctions de classe C^1 , la fonction φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k.$$

Par ailleurs, $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad J_\lambda \varphi(t) &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^{k+1} + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \quad \text{car, avec } \mathbf{Q30.}, \quad J_0^p = 0_p. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \varphi(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda)$$

Comme $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ commute avec J_0 , J_λ commute aussi avec $\exp(tJ_\lambda)$ et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda.}$$

Q38. D'après **Q30.**, $\forall k \geq p, \quad J_0^k = 0_p$. Donc on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$$

et cette somme est en fait une somme finie. On a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(-tJ_\lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} J_0^k.$$

On peut donc calculer en manipulant en réalité des sommes finies :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tJ_\lambda) \times \exp(-tJ_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{t^\ell}{\ell!} J_0^\ell \frac{(-t)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} J_0^{k-\ell} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \right) J_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (1 + (-1))^k J_0^k \\ &= I_p \quad \text{car les termes autres que pour } k=0 \text{ sont nuls.} \end{aligned}$$

On en conclut que, pour tout réel t ,

$$\boxed{\text{la matrice } \exp(tJ_\lambda) \text{ est inversible d'inverse } \exp(-tJ_\lambda).}$$

Q39. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $Y : t \longmapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$. On a donc, par **Q38.**, $X : t \longmapsto \exp(tJ_\lambda)Y(t)$.

La fonction φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on déduit que X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Supposons donc X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par **Q37.** :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) &= -\varphi'(-t)X(t) + \varphi(-t)X'(t) \\ &= -\exp(-tJ_\lambda)J_\lambda X(t) + \exp(-tJ_\lambda)X'(t) \\ &= \exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)). \end{aligned}$$

— Si X est solution de (S) , on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = 0$, et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle,

- Si Y est constante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)) = 0$. Comme la matrice $\exp(-tJ_\lambda)$ est inversible, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) - J_\lambda X(t) = 0$ et X est solution de (S) .
- Conclusion : X est solution de (S) si et seulement si Y est constante sur $\mathbb{R}$.

Or Y est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = X_0$.
Ce qui précède et **Q38.** permettent de conclure que

$$\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } \exists X_0 \in E / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0.}$$

Q40. On suppose $\lambda > 0$. Prenons $X_0 = e_p$. On a alors :

$$J_0 X_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_0^k X_0 = 0 \quad \text{mais} \quad J_0^0 X_0 = X_0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0 = e^{\lambda t}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

D'après **Q39.**, X est solution de (S) et comme $\lambda > 0$, cette solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 0, \quad (S) \text{ admet une solution non bornée sur } \mathbb{R}_+.$$

Q41. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $X \in E$. Alors $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, y_i =$

$\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j$. Donc

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^p y_i^2 = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right)^2.$$

À i fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^p$ donne

$$\left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p x_j^2 \right) \leq \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \|X\|^2.$$

On en déduit :

$$\|AX\|^2 \leq \|X\|^2 \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \leq \|X\|^2 (N(A))^2.$$

Ainsi, comme on a des nombres positifs :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad \forall X \in E, \quad \|AX\| \leq N(A)\|X\|.$$

Considérons ensuite $\lambda < 0$ et une solution X de (S) . D'après **Q39.**, il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0$. Donc, par ce qui précède et comme N est une norme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|X(t)\| \leq N(\exp(tJ_\lambda))\|X_0\| \leq e^{\lambda t} N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \right) \|X_0\| \leq \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k).$$

Comme $\lambda < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) = 0$.

De plus, la fonction $\left(t \mapsto \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) \right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc bornée

Si $\lambda < 0$ alors toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Q42. Supposons à présent $\lambda = 0$. D'après **Q30.** :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(tJ_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $X_0 \in E$ et $X : t \longmapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ une solution de (S) .

On déduit de la matrice ci-dessus :

Si X_0 est un vecteur de $\text{Vect}(e_p)$ alors X est bornée.
Sinon, X n'est pas bornée.