

TD 15 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Exercice 1 : Révisions : ordre 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(1+x^2)^2 y' + 2xy = xe^{\frac{1}{1+x^2}}$
2. Résoudre sur $]0, 1[$: $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 2 : Révisions ; ordre 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $-2y'' + y' + y = e^{ix}$
2. $y'' + y' + y = \operatorname{sh}(t)$
3. $y'' - 4y' + 4y = e^x \sin(x)$
4. $y'' + 4y = \cos(2x)$

Exercice 3 : Raccordements

1. Résoudre $x^2 y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $2x^2 y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $x^2 y' - (2x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Système différentiel

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= 3x - 4y \\ y' &= 2x - 3y. \end{cases}$$

Exercice 5 : Solutions DSE

On considère l'équation différentielle : $xy'' + y' + y = 0$.

Trouver une solution h développable en série entière au voisinage de l'origine et telle que $h(0) = 1$.

Exercice 6 : Solutions DSE

Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 7 :

Soit $(E) : y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée (H).
2. On pose $g = f' + 2f$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle (E') du premier ordre que l'on précisera.
3. Résoudre (E') puis résoudre (E) .

Exercice 8 : Equations d'Euler, changement d'inconnue

On considère des équations différentielles de la forme : $(E) \quad x^2 y'' + axy' + by = h(x)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et où h est continue.

1. Soit $f : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{++}$ si et seulement si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(e^t)$ est solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
2. Résoudre à l'aide du 1. les équations suivantes :
 - a) $x^2 y'' + xy' + y = 0$ avec $y(1) = 0$ et $y'(1) = 2$
 - b) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 1 + x^2$
3. Trouver les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}^{++}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = f(\frac{1}{x})$.

Exercice 9 : Changement de fonction

1. On souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*} : x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$. Montrer que $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $g : x \mapsto x^2 f(x)$ est solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on résoudra. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Reprendre la question 1. pour résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*} : x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ à l'aide de $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$

Exercice 10 : Utilisation d'un changement de fonctions et de solutions DSE

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

1. (a) Déterminer les solutions développables en série entière.
(b) Pourquoi peut-on dire que (E) admet d'autres solutions ?
2. Résoudre (E) à l'aide du changement de fonctions $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$. Effectuer les raccords éventuels.

Exercice 11 : Théorème fondamental

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x t f(t) dt = 1.$$

Exercice 12 : Wronskien

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et, a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère :

$$(E) \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Soit f et g deux solutions de (E). On définit le wronskien de (f, g) par l'application de I dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $t \in I$, $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

1. Montrer que le wronskien W de f et g est solution de l'équation différentielle : $y' + a(t)y = 0$.
2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1) (f, g) est une base de $\mathcal{S}$
 - (2) $\exists t \in I, W(t) \neq 0$
 - (3) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$

Exercice 13 : Lemme de Grönwall

Soient f et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $a \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) > 0$ et $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u)du$. On note F la primitive de fg qui s'annule en 0.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+ : F'(t) - g(t)F(t) \leq ag(t)$.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leq a \exp \left(\int_0^t g(u)du \right)$.