

Exercice 11

$$1) \forall t \in \mathbb{R}^+, F(t) = \int_0^t f(s)g(s)ds.$$

F est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F'(t) = f(t)g(t) \leq a g(t) + F(t)g(t)$$

$$\text{car } \begin{cases} g(t) > 0 \\ f(t) \leq a + F(t) \end{cases}$$

$$\text{donc } F'(t) - F(t)g(t) \leq a g(t)$$

donc en notant $G: t \mapsto \int_0^t g(s)ds$ une primitive de g ,

$$\underbrace{F'(t)e^{-G(t)} - F(t)g(t)e^{-G(t)}}_{\phi'(t)} \leq a g(t)e^{-G(t)}$$

$$\phi'(t) \text{ ou } \phi: t \mapsto F(t)e^{-G(t)} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{donc } \int_0^t \phi'(s)ds \leq \int_0^t a g(s)e^{-G(s)}ds$$

$$\text{ce qui donne } \phi(t) \leq a [-e^{-G(s)}]_0^t = a(1 - e^{-G(t)})$$

$$\text{donc } F(t) \leq e^{G(t)} a (1 - e^{-G(t)}) \quad (*)$$

$$f(t)g(t) = g(t)(a + F(t)) \text{ par hypothèse}$$

$$\leq g(t) [a + a e^{G(t)} - a] \text{ par } (*)$$

$$\text{" } a g(t) e^{G(t)}$$

$$\text{Comme } g(t) > 0$$

$$\text{on trouve } f(t) \leq a e^{G(t)}$$

$$\text{donc : } \forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leq a e^{\int_0^t g(s)ds}$$

Exercice 12

1) $\forall t \in \mathbb{I}, W'(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$

W est dérivable et

$\forall t \in \mathbb{I}, W'(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t)$

donc $W'(t) + a(t)W(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t) + a(t)f(t)g'(t) - a(t)f'(t)g(t)$
 $= f(t)(g''(t) + ag'(t)) - g(t)(f''(t) - a(t)f'(t))$
 $= -b(t)f(t)g(t) - (-b(t)f(t)g(t))$
car f et g sont solutions.
 $= 0$.

donc $\forall t \in \mathbb{I}, W'(t) + a(t)W(t) = 0$.

2) W est solution de (E') : $y' + a(t)y = 0$.

L'ens. des solutions S de (E) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Si (f, g) est une base de S , comme pour tout $t_0 \in \mathbb{I}$, $\phi_{t_0} : S \rightarrow \mathbb{K}^2$ est un isomorphisme,
 $f \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$

$(\phi_{t_0}(f), \phi_{t_0}(g))$ est une base de $\mathbb{K}^2$.

donc $\begin{vmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$ car $((f(t_0), f'(t_0)), (g(t_0), g'(t_0)))$ est libre

donc $W(t_0) = f(t_0)g'(t_0) - g(t_0)f'(t_0) \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) : clair

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{I}$, $W(t_0) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{vmatrix}$$

Alors avec les notations ci-dessus, $\phi_{t_0}^{-1}((f(t_0), f'(t_0)), (g(t_0), g'(t_0)))$ est une base de S puisque c'est l'image par un isomorphisme de $((f(t_0), f'(t_0)), (g(t_0), g'(t_0)))$ qui est une famille libre de cardinal 2 de $\mathbb{K}^2$.

Donc (f, g) est une base de S .