

TD 16 : Espaces préhilbertiens, endomorphismes d'un espace euclidien.

Exercice 1 : Révisions

1. Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel et $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$, $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
Donner un système d'équations et une base de $F^\perp$.
2. Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.
3. Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique B et de son produit scalaire usuel, et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0 \text{ et } x + y - z - t = 0\}$.
Donner la matrice dans la base B de la projection orthogonale sur F . Déterminer la distance de $(1, 1, 0, -1)$ à F .
4. (a) On note $E = \mathbb{R}_3[X]$. Vérifier que l'application : $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ définit un produit scalaire sur E .
(b) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.
(c) Calculer $m = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$.

Exercice 2 : Réflexion dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x - 2y + z = 0$.

Exercice 3 : Réduction pratique d'une matrice symétrique réelle

Diagonaliser A dans une base orthonormée si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$. Montrer que $\int_a^b f(t)^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(t)^2 dt$.

Exercice 5 : Base orthonormale

Soient E un espace euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E tels que $\forall x \in E$,

$$\sum_{i=1}^n (x/e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 6 :

Soit E un espace euclidien, (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires et f une application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$$

.

1. f est-il un automorphisme auto-adjoint ?
2. Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$ et donner les éléments propres de f .

Exercice 7 : Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}_2[X]$

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
 - (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E . Quelle est sa dimension ?
 - (b) Soit φ la projection orthogonale sur H . Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8 : Produit scalaire et distance sur $M_n(\mathbb{R})$

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall (A, B) \in E^2, \phi(A, B) = \text{tr}(^t A.B)$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. On prend $n = 2$ dans cette question. Montrer que la base canonique de E est une base ortho-normée.
3. Montrer que $\forall A \in E, |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$
4. Montrer que $\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\min_{M=(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2$.

Exercice 9 : Polynômes orthogonaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_0 = 1, P_1 = X, \dots, P_n = X^n$ sa base canonique. On définit pour tout $(P, Q) \in E^2, (P/Q) =$

$$\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que l'application $(./.)$ définit bien un produit scalaire sur E .
2. Montrer que la famille des polynômes de Lagrange $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ forme une base ortho-normale de E pour $(./.)$.
3. Soit $P \in E$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $H = \{P \in E / \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.
 - (a) Montrer que H est un hyperplan de E et déterminer une base de $H^\perp$.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur H puis calculer la distance de Q à H .

Exercice 10 : Polynômes orthogonaux : polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2, (P/Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

1. Justifier que $(./.)$ définit bien un produit scalaire sur E .
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré et le coefficient dominant de T_n .
5. Montrer à l'aide du changement de variables $x = \cos(t)$ que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

6. En déduire la valeur de $m = \min_{P \in U_n} \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est l'ensemble des polynômes de E de degré n unitaires.

Exercice 11 : Isométries de $\mathbb{R}^3$

Déterminer dans chacun des cas la nature et les éléments géométriques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M :

$$1. M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad 5. M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 : Isométries de $\mathbb{R}^3$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $B = (i, j, k)$. Déterminer la matrice dans la base B de la rotation d'axe Vect(u) avec $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 : Application du théorème spectral

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire suivant : $\forall (P, Q) \in E^2, (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

Soit $u : E \rightarrow E, P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 14 : Matrices symétriques positives

1. Soit R une matrice symétrique réelle positive. Montrer qu'il existe S symétrique réelle positive telle que $R = S^2$.
2. Démontrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement s'il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(A)$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^* : u_k = (\text{tr}(A^k))^{\frac{1}{k}}$. Montrer que $(u_k)_k$ converge vers la plus grande valeur propre de A .

Exercice 15 : Endomorphismes antisymétriques

Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si $\forall x, y \in E, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

1. Soit $u \in L(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) u est antisymétrique
(ii) $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.
(iii) la matrice de u dans une base orthonormale quelconque est antisymétrique.
2. Montrer que si u est antisymétrique, on a $E = \text{Ker}(u) \oplus^\perp \text{Im}(u)$.
3. Montrer que si $u \in L(E)$ est antisymétrique alors 0 est la seule valeur propre éventuelle de u puis que le rang de u est pair.
4. $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Soit a un vecteur unitaire et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge x$. Montrer que f est antisymétrique, en déduire que $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 16 :

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

1. Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'on a : $\lambda_1 \|X\|^2 \leq X^T A X \leq \lambda_n \|X\|^2$.
2. En déduire les égalités : $\lambda_1 = \min_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{\|X\|^2}$ et $\lambda_n = \max_{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{\|X\|^2}$.

Exercice 17 : Déterminant de Gram

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour $(U_1, \dots, U_p) \in E^p$, on pose $G(U_1, \dots, U_p) = (\langle U_i, U_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$.

1. Montrer que si la famille $(U_1, \dots, U_p)$ est liée, alors $\det G(U_1, \dots, U_p) = 0$. Démontrer la réciproque.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de base $(U_1, \dots, U_p)$. Montrer que pour $x \in E$ on a

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(U_1, \dots, U_p, x)}{\det G(U_1, \dots, U_p)}}, \text{ où } d(x, F) \text{ désigne la distance de } x \text{ à } F.$$

Exercice 18 : Endomorphisme symétrique de trace nulle (*)

Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E tel que u est de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) \perp x$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

Exercice 19 : Diagonalisation dans une base commune d'endomorphismes qui commutent (*)

Soit E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes symétriques de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une base commune de vecteurs propres orthonormée.

Exercice 20 : Adhérence de $S_n^+(\mathbb{R})$

1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit Φ un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est un automorphisme.
3. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $S_n^+(\mathbb{R})$.