

Exercice 2: Réflexion dans $\mathbb{R}^3$.

On note $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ et s_P la réflexion d'axe P .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in P \Leftrightarrow x = 2y - z \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow u \in \text{Vect}(e_1, e_2)$$

en notant $e_1 = (2, 1, 0)$ et $e_2 = (1, 0, -1)$.

e_1 et e_2 n'étant pas colinéaires, ils forment une base de P .
(non orthonormée et non orthogonale).

→ 1^{re} méthode: on calcule $\pi_P(x, y, z)$ où π_P désigne la projection orthogonale sur P , puis $s_P(x, y, z) = 2\pi_P(x, y, z) - (x, y, z)$.
Pour calculer $\pi_P(u)$, on peut:

a) écrire: $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \pi_P(u) = \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$

et $\begin{cases} \langle u - \pi_P(u), e_1 \rangle = 0 \\ \langle u - \pi_P(u), e_2 \rangle = 0 \end{cases}$ ce qui donne un système 2×2 .

la résolution du système donne λ et μ .

b) déterminer avec le procédé de Schmidt une bon (e'_1, e'_2) de P : on trouve $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ et $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, -5)$ par ex.

puis $\pi_P(u) = \langle u, e'_1 \rangle e'_1 + \langle u, e'_2 \rangle e'_2$

On trouve $s_P(x, y, z) = \frac{1}{3} (2x + 2y - z, 2x - y + 2z, -x + 2y + 2z)$

dc $M_B(s_P) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

→ 2^e méthode:

$P^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$

donc $(x, y, z) \in P^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

donc $P^\perp = \text{Vect}(1, -2, 1)$ on note $e_3 = (1, -2, 1)$.

et $E = (e_1, e_2, e_3)$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$ car (e_1, e_2) base de P , (e_3) base de $P^\perp$ et $P \oplus P^\perp = \mathbb{R}^3$.

Par définition $M_E(s_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} s_P(e_1) = e_1 \\ s_P(e_2) = e_2 \\ s_P(e_3) = -e_3 \end{cases}$

On note $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$e_1 = 2b_1 + b_2$

$e_2 = b_1 - b_3$

$e_3 = b_1 - 2b_2 + b_3$

donne donc

$$\begin{cases} s(2b_1 + b_2) = 2b_1 + b_2 \\ s(b_1 - b_3) = b_1 - b_3 \\ s(b_1 - 2b_2 + b_3) = -b_1 + 2b_2 - b_3 \end{cases}$$

d'où le système $\begin{cases} 2s(b_1) + s(b_2) = 2b_1 + b_2 \\ s(b_1) - s(b_3) = b_1 - b_3 \\ s(b_1) - 2s(b_2) + s(b_3) = -b_1 + 2b_2 - b_3 \end{cases}$ que l'on résout.

TD 16 : CORRIGES.

Exercice 7 : Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}_2[X]$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 - Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
 - Pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda P + Q, R \rangle &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P + Q)'(1)R'(1) + (\lambda P + Q)''(1)R''(1) \\
 &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P' + Q')(1)R'(1) + (\lambda P'' + Q'')(1)R''(1) \quad (\text{par linéarité de la dérivée}) \\
 &= (\lambda P(1) + Q(1))R(1) + (\lambda P'(1) + Q'(1))R'(1) + (\lambda P''(1) + Q''(1))R''(1) \quad (\text{par linéarité}) \\
 &= \lambda(P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1)) + Q(1)R(1) + Q'(1)R'(1) + Q''(1)R''(1) \\
 &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle,
 \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
- Pour tout $P \in E$,

$$\langle P, P \rangle = (P(1))^2 + (P'(1))^2 + (P''(1))^2 \geq 0$$

comme somme de termes positifs et

$$\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0,$$

car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul.

Par suite, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors 1 est une racine au moins triple de P , qui est un polynôme de degré au plus 2, donc $P = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc défini positif.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur E .

- $(1, X, X^2)$ est une base de E . Appliquons lui le procédé de Gram-Schmidt.

 - $\langle 1, 1 \rangle = 1$, donc on pose $P_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.
 - $\langle X, 1 \rangle = 1$, donc on pose $Q_2 = X - 1$.

On a alors $\langle X - 1, X - 1 \rangle = 0 + 1 = 1$, donc on pose $P_2 = \frac{X-1}{\sqrt{1}} = (X - 1)$.

 - $\langle X^2, X - 1 \rangle = 0 + 2 = 2$, $\langle X^2, 1 \rangle = 1$, donc on pose $P_3 = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

On a alors $\langle (X - 1)^2, (X - 1)^2 \rangle = 0 + 0 + 4$, donc on pose $Q_3 = \frac{(X-1)^2}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}(X - 1)^2$.

 - La famille $(1, X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est alors une base orthonormée de E pour le produit scalaire considéré.
- La famille $(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Le projeté orthogonal de U sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$V = \langle U, 1 \rangle 1 + \langle U, X - 1 \rangle (X - 1) = -3 + 2(X - 1).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par suite, } d(U, \mathbb{R}_1[X]) &= d(U, V) = \sqrt{\langle U - V, U - V \rangle} = \sqrt{\langle X^2 - 2X + 1, X^2 - 2X + 1 \rangle} = \\
 &= \sqrt{\langle (X - 1)^2, (X - 1)^2 \rangle} = \sqrt{4} = 2.
 \end{aligned}$$

On aurait pu décomposer U sur la base obtenue à la question précédente sous la forme :

$$U = 2 \times \underbrace{\frac{1}{2}(X - 1)^2}_{\in \mathbb{R}_1[X]^\perp} + \underbrace{2(X - 1) - 3}_{\in \mathbb{R}_1[X]},$$

et on a alors directement

$$d(U, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| 2 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2 \right\| = 2 \left\| \frac{1}{2}(X - 1)^2 \right\| = 2.$$

4. (a) • Par linéarité de l'évaluation, $\psi : P \in E \mapsto P(1)$ est une application linéaire, donc $H = \ker(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de E .
 ψ est non nulle, car $\psi(1) = 1 \neq 0$, donc $\text{rg}(\psi) \geq 1$.
De plus, $\text{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}$, donc $\text{rg}(\psi) \leq 1$, et, par suite, $\text{rg}(\psi) = 1$.
D'où, d'après le théorème du rang, on a $\dim H = \dim(\ker \psi) = \dim E - \text{rg}(\psi) = 3 - 1 = 2$.
- (b) On remarque de plus que $(X - 1)$ et $\frac{1}{2}(X - 1)^2$ sont des éléments de H , donc la famille $(X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est une famille libre formée de 2 éléments de H , espace vectoriel de dimension 2, donc c'est une base (orthonormée) de H .
De plus, comme $(1, X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est une base orthonormée de E , on a $H^\perp = \text{Vect}(1)$.
Enfin, on a

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0(X - 1) + 0 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2, \\ X &= 1 + 1(X - 1) + 0 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2, \\ \text{et } X^2 &= 1 + 2(X - 1) + 2 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = (X - 1)^2 + 2(X - 1) = X^2 - 1,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

1. D'après le cours, pour démontrer que $(|)$ est un produit scalaire, il faut prouver qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, positive et définie.

- Symétrie : soient $(P, Q) \in E^2$.

$$\text{On a } (P|Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^n Q(a_j)P(a_j) = (Q|P) \text{ et } (|) \text{ est symétrique.}$$

- Bilinéarité : soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q|R) &= \sum_{j=0}^n (\lambda P + Q)(a_j)R(a_j) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^n P(a_j)R(a_j) + \sum_{j=0}^n Q(a_j)R(a_j) \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R) \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche.

Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $P \in E$, $(P|P) = \sum_{j=0}^n P(a_j)^2 \geq 0$.

- Définition : soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

$$\text{Alors } \sum_{j=0}^n P(a_j)^2 = 0 \text{ donc pour tout } j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = 0.$$

Il en résulte que P admet $n + 1$ racines distinctes.

Comme P est de degré au maximum n , il ne peut avoir au maximum que n racines et donc, c'est le polynôme nul.

Conclusion : (|) est un produit scalaire sur E

2. Soit $P \in E$.

$$(P|P_0) = \sum_{j=0}^n P(a_j)P_0(a_j) = \sum_{j=0}^n P(a_j)$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Alors $L_j(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$ car $i \neq j$.

En fait, pour tout $i \neq j$, $X - a_i$ est en facteur dans L_j .

$$\text{Ensuite, pour } i = j, L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1.$$

3.2. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) L_j(a_k) = L_i(a_i) L_j(a_i) + L_i(a_j) L_j(a_j) = 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale.

3.3. Comme $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, elle est libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = n + 1 = \dim(E)$, c'est une base de E .

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(L_i | L_i) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1.$$

et, $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E

3.4. Soit $P \in E$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , les composantes de P sont données par :

$$(P | L_i) = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_i(a_k) = P(a_i)$$

Ainsi,
$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

3.5. On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^n L_j$ car pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_0(a_i) = 1$.

4.

4.1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0 | P) = \sum_{j=0}^n P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.

Donc $H = \text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E

4.2. D'après le cours, on a $H = \text{Vect}(P_0)^\perp$, donc $H^\perp = \text{Vect}(P_0)$

Comme $\dim(H^\perp) = 1$, on a $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n$

5.

- 5.1. D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace.

Comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \frac{P_0}{\|P_0\|} = \frac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de $H^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est donné par

$$(Q|R)R = \frac{1}{n+1}(Q|P_0)P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)$$

soit

$$p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)$$

- 5.2. Enfin, la distance de Q au sous-espace vectoriel H est égale à la norme du projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$:

$$d(Q, H) = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n Q(a_j)P_0 \right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{j=0}^n Q(a_j) \right|$$