

Sujet de révision : Espaces préhilbertiens : CORRIGE.

EXERCICE 1 : E3A PSI 2020

1. On a, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la première, puis à la deuxième variable :

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 \Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 \Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2 y_1 \Phi(\vec{j}, \vec{i}) + x_2 y_2 \Phi(\vec{j}, \vec{j}).$$

Grâce aux données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cos(\theta) + x_2 y_2.$$

2. Au vu de la formule explicite obtenue dans la première question, le fait que ce soit une forme bilinéaire est évident, notamment du fait de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour la symétrie, on note que le produit étant commutatif dans $\mathbb{R}$, si $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ et $Y = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ alors :

$$\Phi(Y, X) = y_1 x_1 + (y_1 x_2 + y_2 x_1) \cos(\theta) + y_2 x_2 = \Phi(X, Y).$$

Il reste à vérifier que Φ est définie et positive. Or, si $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$, alors :

$$\begin{aligned} \Phi(X, X) &= x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos(\theta) + x_2^2 = (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2 - \cos(\theta)^2 x_2^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + (1 - \cos(\theta)^2)x_2^2. \end{aligned} \quad (*)$$

On a $1 - \cos(\theta)^2 \geq 0$ (mieux : par hypothèse $\theta \in]0, \pi[$, donc $1 - \cos(\theta)^2 > 0$), donc la somme ci-dessus ne contient que des termes positifs. On en déduit d'une part : $\Phi(X, X) \geq 0$. D'autre part, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :

$$\Phi(X, X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \cos(\theta)x_2 = 0 \\ \underbrace{(1 - \cos(\theta)^2)x_2}_{>0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

donc $\Phi(X, X) = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul : ceci achève de démontrer que Φ est définie positive.

En tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, Φ est un produit scalaire sur E .

3. Comme f est linéaire, pour montrer que f est une isométrie il suffit de démontrer qu'elle préserve la norme euclidienne associée au produit scalaire Φ . C'est-à-dire :

$$\forall X \in E, \quad \Phi(f(X), f(X)) = \Phi(X, X).$$

On nous donne la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, ce qui nous permet d'en déduire : $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j}$, et donc, pour tout $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$, on a :

$$f(X) = x_1 f(\vec{i}) + x_2 f(\vec{j}) = -x_2 \vec{i} + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2) \vec{j}.$$

Grâce à l'explicitation de Φ donnée dans la première question (ou plutôt grâce à $(*)$ si l'on s'intéresse à $\Phi(X, X)$ et $\Phi(f(X), f(X))$), on en déduit :

$$\begin{aligned} \Phi(f(X), f(X)) &= (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2) \cos(\theta) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos(\theta) - 4x_2^2 \cos(\theta)^2 + x_1^2 + 4x_1 x_2 \cos(\theta) + 4\cos(\theta)^2 x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X, X), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Notons que $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc $\vec{i}$ est déjà unitaire pour ce produit scalaire. Posons :

$$\vec{u} = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i}, \quad \text{et :} \quad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vec{u}, \vec{u})}}\vec{u}.$$

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure alors que la famille $(\vec{i}, \vec{k})$ est orthonormée, et qu'on a $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$. Explicitons $\vec{k}$; on a : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\theta)$, et donc :

$$\vec{u} = \vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}.$$

Or :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) \stackrel{(*)}{=} (-\cos(\theta))^2 - 2\cos(\theta)\cos(\theta) + 1^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2,$$

donc finalement :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)^2}} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}) = \frac{1}{\sin(\theta)} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}).$$

5. On sait déjà que f est une isométrie, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ permet de voir immédiatement que $\det(f) = \det(C) = 1$, donc f est une rotation planaire dont il reste à déterminer une mesure d'angle $\vartheta \in \mathbb{R}$ (faisons fi de l'orientation pour le moment) : or $2\cos(\vartheta) = \text{tr}(f)$ d'après la classification des isométries directes en dimension 2, donc $\cos(\vartheta) = \cos(\theta)$, et $\vartheta \equiv \pm\theta \pmod{2\pi}$. Sans aller plus loin, on s'attend donc déjà à ce que la matrice de f dans une base orthonormée (ce qu'est $(\vec{i}, \vec{k})$) soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mp \sin(\theta) \\ \pm \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Or $f(\vec{i}) = \vec{j}$ d'après la donnée de la matrice C , et du fait que $\vec{k} = \frac{1}{\sin(\theta)} (\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i})$ on en déduit : $\vec{j} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$. Par conséquent $f(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$, ce qui signifie que la première colonne de $M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. La discussion qui précède nous assure donc qu'on a :

$$M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si E est orienté de sorte que la base $(\vec{i}, \vec{k})$ soit directe (ou $(\vec{i}, \vec{j})$: les deux bases ont même orientation), alors f est une rotation planaire de mesure d'angle θ .

Remarque. Il est aussi possible d'obtenir $M_{(\vec{i}, \vec{k})}(f)$ à partir de $M_{(\vec{i}, \vec{j})}(f) = C$ grâce à la formule du changement de base.

6. Comme f est une rotation planaire de mesure d'angle θ , on sait que f^m est une rotation de mesure d'angle $m\theta$. Par conséquent, $f^m = \text{Id}_E$ si et seulement si $m\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $m\theta = 2k\pi$. On en déduit :

$$f^m = \text{Id}_E \iff \theta \in \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{2k\pi}{m} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

EXERCICE 2 : Décomposition QR : Centrale PSI 2020

1. Les vecteurs colonnes de P forment une base de $\mathbb{R}^n$ car P est inversible.
2. On applique le procédé de Gram-Schmidt en posant : $u_1 = \frac{1}{\|c_1\|} \cdot c_1$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$u_k = \frac{1}{\|v_k\|} \cdot v_k = \frac{1}{\|v_k\|} \left(c_k - \sum_{j=1}^{k-1} (c_k | u_j) u_j \right)$$

ce qui donne : $c_1 = \|c_1\| u_1$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$c_k = \|v_k\| \cdot u_k + \sum_{j=1}^{k-1} (c_k | u_j) u_j$$

3. La matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ contient les coordonnées de $u_1, \dots, u_n$ dans la base $(c_1, \dots, c_n)$ donc est d'après ci-dessus triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
4. On pose $R = P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1}$ et $Q = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_2}$ en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Q est orthogonale car c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On a de plus :

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1} = QR$$

5. (a) Soit M orthogonale, alors $M^{-1} = M^T$. Or M^{-1} est triangulaire supérieure comme M donc diagonale (puisque égale à sa transposée) donc égale à I_n puisqu'orthogonale.
(b) Soient $(Q_1, R_1), (Q_2, R_2)$ deux couples qui conviennent tels que $P = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$. Alors on a $R_1 R_2^{-1} = Q_1^{-1} Q_2$ qui est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (produit de deux matrices qui le sont) donc égale à I_n d'après a. Finalement $R_2 = R_1$ et $Q_2 = Q_1$.
6. $Px = b$ s'écrit : $QRx = b$ donc $Rx = Q^T b$ ce dernier système étant triangulaire, il peut se résoudre facilement en partant de la dernière ligne par substitution.
7. On trouve :

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$