

Sujet de révision : Espaces préhilbertiens, endomorphismes d'un espace euclidien.

EXERCICE 1

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ .
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f .
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

EXERCICE 2 : Décomposition QR

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. On note $c_1, \dots, c_n$ ses vecteurs colonnes (et on assimile $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$). L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, qui rend la base canonique orthonormée.

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (c_1, \dots, c_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.
2. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}_1$, construire une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(c_1, \dots, c_n)$.
On exprimera pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ c_k en fonction des c_i et des u_i pour $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$.
3. Justifier que la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
4. En déduire $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $P = QR$.
5. Unicité
 - (a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Montrer que $M = I_n$.
 - (b) Montrer l'unicité de la décomposition obtenue à la question précédente.
On a donc montré que : **pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $P = QR$.**
6. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Expliquer l'intérêt d'une telle décomposition pour résoudre le système linéaire $PX = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.
7. Exemple : soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition QR de P .