

Sujet de révision : CCINP PSI 2013.

PROBLEME

Notations.

Pour ce problème, on désigne par :

- n un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

- tA la matrice transposée de A ;
- $\det(A)$ le déterminant de A ;
- $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k .
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x|y) = {}^tx \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est la norme euclidienne associée.

- La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$.

A toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) = (Ax|x)$$

Objectifs.

Dans la **partie I**, on étudie q_A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n} \quad \text{où} \quad a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres et de l'intervalle $[\min Sp(H_n), \max Sp(H_n)]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Enoncer les propriétés de la sphère unité Ω_n ainsi que celles de la fonction q_A qui permettent d'affirmer que q_A est bornée sur Ω_n et qu'elle atteint ses bornes.

On note $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$ et $M_A = \max(q_A(\Omega_n))$.

I.1.2 Démontrer que $\mathbb{R} \cap Sp(A) \subset [m_A, M_A]$.

I.1.3 Expliciter $Sp(A)$, m_A et M_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pourra remarquer que $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) / \theta \in \mathbb{R}\}$.

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

I.2.1 Montrer que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

I.2.2 Si $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(y+z)$ (qui est nul d'après **I.2.1**) en fonction de $(Ay|z)$ et $(Az|y)$.

I.2.3 Montrer que la matrice A est anti-symétrique (c'est à dire que ${}^t A = -A$). Entre autre méthode, on pourra par exemple considérer les vecteurs y et z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0) \iff (A = (0) \text{ (matrice nulle)})$$

I.4 Montrer que l'application $N : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme

I.5 **Bornes de Q_A sur Ω_n .**

On rappelle le théorème spectral : étant donné une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A , alors u étant symétrique réel, il se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire : il existe n nombres réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_n$ et une base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k$$

On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on conserve les notations de ce théorème dans les questions **I.5**.

I.5.1 Préciser $q_A(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

I.5.2 Soit $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$. Justifier les égalités $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1$ puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x .

I.5.3 Retrouver le résultat obtenu en **I.1.1** : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n . Expliciter m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A .

I.5.4 Montrer que $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$. Etablir une inégalité entre $|\det(A)|$ et $(N(A))^n$.

I.5.5 **Exemple** : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par

$$H_n = \left(\left(\frac{1}{j+k-1} \right) \right)_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j, k \leq n}$ avec $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$.

Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) = q_{H_n}(x) = (H_n x | x)$$

II. Sur les valeurs propres de H_n .

II.1 **Une expression de $q_n(x)$.**

Soit $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

II.1.1 Montrer que

$$q_n(x) = (H_n x | x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$$

II.1.2 Développer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)$$

où t est une variable réelle.

II.1.3 Montrer que

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt$$

II.1.4 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$$

et que $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

II.2 **Une majoration de $q_n(x)$.**

II.2.1 Soit $P(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

On pourra expliciter $\int_{-1}^1 t^k dt$ et $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$.

II.2.2 En gardant les notations introduites en **II.1** et en notant

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$$

montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$. On pourra utiliser les résultats obtenus en **II.1** et **II.2.1**.

II.2.3 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

II.3 **Application à $Sp(H_n)$.**

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$\mu_n = \min(Sp(H_n)) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max(Sp(H_n))$$

II.3.1 Expliciter μ_2 et ρ_2 . Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

II.3.2 Montrer que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$. On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux e_1 et e_n tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$, $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$ et le vecteur $x = \sqrt{1-t} e_1 + \sqrt{t} e_n$ où $t \in [0, 1]$.

II.3.3 Calculer $(H_n \varepsilon_n | \varepsilon_n)$ où ε_n désigne le vecteur de la base canonique

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la limite de μ_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.