

Sujet de révision : CCINP PSI 2013 : CORRIGE.

I. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Pour que q_A soit bornée et atteigne ses bornes sur Ω_n , il suffit que q_A soit continue (ce qui est vrai par théorèmes d'opérations puisque $q_A(x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k} x_j x_k$) et que Ω_n soit compact (fermé borné en dimension finie ; le caractère borné est immédiat et le caractère fermé provient de la caractérisation séquentielle des fermés avec la continuité de la norme par exemple).

I.1.2 Soit λ une valeur propre réelle de A . Il existe alors x non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Posons $y = \frac{x}{\|x\|}$; c'est un élément de Ω_n et $q_A(y) = \frac{1}{\|x\|^2}(Ax|x) = \frac{1}{\|x\|^2}(\lambda x|x) = \lambda$. Ainsi $\lambda \in q_A(\Omega_n) = [m_A, M_A]$ et on a montré que

$$\mathbb{R} \cap Sp(A) \subset [m_A, M_A]$$

I.1.3 A étant triangulaire, on lit les valeurs propres sur la diagonale :

$$Sp(A) = \{2\}$$

Par ailleurs $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad q(\cos(\theta), \sin(\theta)) = 2 - \cos(\theta)\sin(\theta) = 2 - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Comme $\sin(2\theta)$ décrit $[-1, 1]$ quand θ parcourt $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$q_A(\Omega_2) = [3/2, 5/2]$$

I.2.1 Si y est non nul, on peut poser $x = y/\|y\|$ et remarquer que puisque $x \in \Omega_n$, $q_A(y) = \|y\|^2 q_A(x) = 0$. Comme $q_A(y) = 0$ de manière directe on a montré que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(y) = 0$$

I.2.2 Par bilinéarité du produit scalaire, $q_A(y + z) = q_A(y) + q_A(z) + (Ay|z) + (Az|y)$. Avec la question précédente, on a donc

$$0 = q_A(y + z) = (Ay|z) + (Az|y)$$

I.2.3 De façon générale, $(Ay|z) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} z_j a_{j,k} y_k$. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc $(Ae_u|e_v) = a_{v,u}$ (ce que l'on peut aussi voir en disant que $(Ae_u|e_v)$ est la v -ième coordonnée de Ae_u puisque la base canonique est orthonormée). Avec la question précédente, on a donc

$$\forall (u, v) \in [1, n], \quad a_{u,v} + a_{v,u} = 0$$

et A est donc antisymétrique.

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (0)$ il est immédiat que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = 0$ (et c'est a fortiori vrai sur Ω_n).

Réciproquement, si q_A est nulle sur Ω_n , on vient de voir que A est antisymétrique. Comme elle est aussi symétrique, elle est nulle ($-{}^t A = A = {}^t A$ et donc $A = 0$).

I.4 On a quatre propriétés à vérifier.

- N est bien définie ($N(A)$ est même un maximum) et est positive (borne supérieure de quantités qui le sont).

- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. On a alors $\forall x \in \Omega_n, 0 \leq |q_A(x)| \leq N(A) = 0$ et q_A est nulle sur Ω_n . D'après la question précédente, $A = 0$. Ceci nous donne l'axiome de séparation.
- Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in \Omega_n, |q_{A+B}(x)| = |q_A(x) + q_B(x)| \leq |q_A(x)| + |q_B(x)| \leq N(A) + N(B)$$

en passant à la borne supérieure, on trouve $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$ ce qui donne l'inégalité triangulaire.

- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \Omega_n, |q_{\lambda A}(x)| = |\lambda| \cdot |q_A(x)| \leq |\lambda| N(A)$$

et en passant à la borne supérieure, on trouve $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.

Si $\lambda = 0$, l'égalité est vraie. Sinon, on en déduit que

$$N(A) = N\left(\frac{1}{|\lambda|}(\lambda A)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$$

et on a encore l'égalité $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$ ce qui donne l'homogénéité.

Remarque : on a besoin de la symétrie des matrices uniquement pour l'axiome de séparation.

I.5.1 Le calcul est immédiat

$$\forall k, q_A(e_k) = (Ae_k|e_k) = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k$$

I.5.2 Les formules proposées correspondent à celles de calcul en base orthonormée ! On les retrouve en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\forall x \in \Omega_n, 1 = \|x\|^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} x'_j x'_k (e_j|e_k) = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2$$

On a aussi

$$q_A(x) = (Ax|x) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x'_k e_k \middle| \sum_{k=1}^n x'_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x'_k)^2$$

I.5.3 En gardant les notations de la question précédente, on a donc

$$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 \leq q_A(x) \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \lambda_n (x'_i)^2 = \lambda_n$$

Le minorant est atteint pour $x = e_1 \in \Omega_n$ et le majorant pour $x = e_n \in \Omega_n$. Ce sont donc des minimum et maximum :

$$m_A = \min Sp(A) = \lambda_1 \text{ et } M_A = \max Sp(A) = \lambda_n$$

I.5.4 On garde toujours les mêmes notations. On a

$$|q_A(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| (x'_k)^2 \leq \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Le majorant est atteint pour e_k tel que $|\lambda_k| = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$ (c'est donc e_1 ou e_n) et c'est donc un maximum :

$$N(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Enfin A est semblable à $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et son déterminant est égal au produit des λ_k . Ainsi,

$$|\det(A)| = \prod_{k=1}^n |\lambda_k| \leq \left(\max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| \right)^n = (N(A))^n$$

I.5.5 Un calcul immédiat donne

$$\det(A) = \frac{1}{12}$$

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}$ ($X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$). Les valeurs propres de A , qui sont les racines de ce polynôme, sont donc

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question précédente donne donc

$$N(A) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

II. Sur les valeurs propres de H_n .

II.1.1 Il s'agit de la formule générale rappelée en I.1.1 et que l'on prouve en utilisant la formule de calcul du produit scalaire en b.o.n.

$$q_n(x) = \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k \right) e_j \middle| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k \right) x_j = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k} x_k x_j$$

II.1.2 Le développement contient n^2 termes (nombre de choix pour un terme dans la première somme et un autre dans la seconde) :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{1 \leq k, j \leq n} x_k x_j t^{k+j-2}$$

II.1.3 On remarque que $\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2$. En intégrant l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \sum_{1 \leq k, j \leq n} x_j x_k \int_0^1 t^{j+k-2} dt$$

Comme $\int_0^1 x_j x_k \int_0^1 t^{j+k-2} dt = \frac{1}{j+k-1}$, la question 1 permet d'affirmer que

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1} = q_n(x)$$

II.1.4 L'intégrale d'une fonction positive sur $[0, 1]$ est positive. De plus si la fonction est en plus continue, il ne peut y avoir nullité de l'intégrale que s'il y a nullité de la fonction sur $[0, 1]$. Or, $x \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2$ est une fonction continue et positive et n'est nulle que si les x_k le sont (une fonction polynomiale n'admet une infinité de racines que si elle est nulle). Ces résultats couplés à la question précédente montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad q_n(x) > 0$$

En particulier, q_n ne prend que des valeurs > 0 sur Ω_n et on a donc $m_{H_n} > 0$. Avec la question I.5.3,

$$Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*$$

II.2.1 On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad -i \int_0^\pi (e^{i\theta})^k e^{i\theta} d\theta = \frac{-i}{(k+1)i} [e^{(k+1)i\theta}]_0^\pi = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \int_{-1}^1 t^k dt$$

Le passage à l'intégrale étant linéaire, des combinaisons linéaires de ces relations montrent que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \int_{-1}^1 P(t) dt$$

II.2.2 La partie **II.1** donne

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt$$

Par ailleurs, la question précédente donne

$$\int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_{-1}^1 Q^2(t) dt = \left| \int_{-1}^1 Q^2(t) dt \right| = \left| -i \int_0^\pi Q^2(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |Q^2(e^{i\theta})| d\theta$$

En combinant les deux résultats, on a donc

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

S'il y a égalité (à droite, on connaît déjà le cas d'égalité à gauche), il doit y avoir égalité dans toutes les étapes intermédiaires et on doit donc avoir $\int_{-1}^0 Q^2(t) dt$. Q étant positive et continue doit être nulle sur $[-1, 0]$. Q est donc le polynôme nul (infinité de racines) et ses coefficients sont nuls. x est donc nul. Ainsi

$$\forall x \neq 0, 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

II.2.3 Explicitons le carré du module ci-dessus en écrivant que $|z|^2 = z\bar{z}$:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} x_j x_k e^{i(k-j)\theta}$$

On en déduit par linéarité du passage à l'intégrale que

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta = \sum_{1 \leq j, k \leq n} x_j x_k \int_0^\pi e^{i(k-j)\theta} d\theta$$

Les intégrales du membre de droite se calculent en distinguant selon que j est ou non égal à k . On obtient

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta = \pi \|x\|^2 + \frac{1}{i} \sum_{k \neq j} x_k x_j \frac{(-1)^{k-j} - 1}{k-j}$$

Dans la somme du membre de droite, on associe les termes deux à deux : un terme (k, j) avec le terme (j, k) et les termes correspondants sont opposés. Ce regroupement montre que la somme est nulle. On a donc

$$\forall x \neq 0, 0 < q_n(x) < \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta = \pi \|x\|^2$$

II.3.1 La question **I.5.5** indique que

$$\mu_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

La question **I.5.3** donne

$$\mu_n = m_{H_n} \quad \text{et} \quad \rho_n = M_{H_n}$$

La question précédente montre que q_n prend sur Ω_n des valeurs dans $]0, \pi[$ (0 n'étant pas dans Ω_n). On a donc

$$0 < \mu_n \leq \rho_n < \pi$$

Par ailleurs, H_n n'étant pas scalaire et diagonalisable, elle admet au moins deux valeurs propres et $\mu_n < \rho_n$. Ainsi

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

II.3.2 Avec la question **I.5.3** on a

$$q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$$

Il nous reste à voir que tout élément de l'intervalle $[\mu_n, \rho_n]$ admet un antécédent par q_n dans Ω_n . On sait qu'il existe des vecteurs e_1 et e_n non nuls tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$ (car μ_n et ρ_n sont des valeurs propres). Les sous-espaces propres de H_n étant orthogonaux (théorème spectral), e_1 et e_n le sont (les valeurs propres μ_n et ρ_n sont différentes). Enfin, quitte à les normer (ce qui ne leur fait pas perdre le caractère propre), on peut supposer $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$. On pose alors $x_t = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$ pour tout $t \in [0, 1]$, en remarquant que $x_t \in \Omega_n$. On a (formule de **I.5.2**)

$$q_n(x_t) = \mu_n(1-t) + \rho_n t$$

et quand t varie dans $[0, 1]$, $q_n(x_t)$ varie dans $[\mu_n, \rho_n]$. Toutes les valeurs de cet intervalle ont donc un antécédent par q_n dans Ω_n et

$$q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$$

II.3.3 Avec la formule de **II.1.1** on a

$$(q_n(\varepsilon_n)|\varepsilon_n) = \frac{1}{2n-1}$$

On en déduit (on rappelle que $\mu_n = m_{H_n}$) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \mu_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

et par théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$$